

Fibonacci-Tonmengen

Casey Mongoven

0.0 Einleitung

Obgleich die Fibonacci-Zahlen und ihre Verwandten schon seit langem die Aufmerksamkeit von Komponisten und Theoretikern auf sich gezogen haben, wird ihre Anwendung auf Tonstruktur noch immer nicht völlig verstanden. In seinem Buch *Einführung in die Formen- und Harmoniewelt Bartóks* erörtert Ernő Lendvai, dass Bartók die Fibonacci-Zahlen in der Tonstruktur seiner *Sonate für 2 Klaviere und Schlagzeug* verwendet haben soll. Jonathan Kramer diskutiert in seinem Artikel *The Fibonacci Series in Twentieth-Century Music* kurz die Anwendung der Fibonacci-Zahlen auf Tonstruktur einiger Komponisten wie z.B. Bartók, Walker und Schillinger. Der jüngste Artikel über das Thema wurde von Howard Wilcox verfasst und heißt *Generating Fibonacci Sequences of Pitch Classes*. Alle diese Schriften lassen Fragen nach der möglichen Anwendung der Fibonacci-Sequenz auf Tonstruktur offen. Dieser Aufsatz versucht eine gründliche Anwendung der Fibonacci-Zahlen auf Tonstruktur zu schaffen, und ist beschränkt auf Fibonacci-Tonmengen, die auf einer zwölftonigen gleichschwebenden Skala basieren, obwohl interessante Ergebnisse auch unter Verwendung anderer Stimmungen und Sequenzen erreicht werden können, wie in einem künftigen Aufsatz gezeigt werden wird.

1.0 Fibonacci-Tonklassenmengen

Ohne einen Modulus würde die Sequenz endlos steigen oder fallen, rasch über die menschliche Hörgrenze hinaus. Mit einem Modulus wird wirklicher Fibonacci-Abstand verloren, aber die Fibonacci-Eigenschaft, dass jede aufeinander folgende Tonklasse die Summe der zwei vorherigen ist, bleibt sogar dann erhalten, wenn die Sequenz das Mod 12-Prisma durchdringt. Die modulare Reduktion der Sequenz auf die Tonklassenmengen schafft eine wiederkehrende Sequenz mit einer Periode von 24. Zu beachten ist, dass die folgende lineare Ordnung von Tonklassen auch in wirklichem Fibonacci-Abstand vorkommt:

(13 21 34 55 89)

0 1 1 2 3 5 8 1 9 10 7 5 0 5 5 10 3 1 4 5 9 2 11 1 (0 1 1)
 C C# C# D Eb F Ab C# A Bb G F C F F Bb Eb C# E F A D B C#

Diese Sequenz lässt sich invertieren:

0 11 11 10 9 7 4 11 3 2 5 7 0 7 7 2 9 11 8 7 3 10 1 11 (0 11 11)
 C B B Bb A G E B Eb D F G C G G D A B Ab G Eb Bb C# B

Die definierende Beziehung dieser Sequenzen ist $f_n + f_{n+1} \equiv f_{n+2} \pmod{12}$, gesprochen $f_n + f_{n+1}$ ist gleich $f_{n+2} \pmod{12}$, wenn f_n die n -te Zahl der Sequenz ist. Von jetzt an werden diese Sequenzen als geordnete Tonklassenmengen bezeichnet; die Kardinalzahl der Tonmenge wird von der Periode der Sequenz bestimmt.

1.1 Generation der Sammlung

Mit Modulus 12 gibt es $12^2 = 144$ mögliche geordnete Zweiklänge $\{f_n, f_{n+1}\}$ (Identitäten inklusive). Die Sequenz ist periodisch, denn jeder geordnete Zweiklang bestimmt die ganze Sequenz. Diese Fakten ermöglichen die Schaffung einer bestimmten Anzahl von Sequenzen, die alle 144 geordneten Zweiklänge enthalten. Die oben angegebenen Mengen gestalten 48 geordnete Zweiklänge; 96 Zweiklänge bleiben übrig. Eine weitere Sequenz kann durch die Multiplikation der Fibonacci-Sequenz mit 2 geschaffen werden:

0 2 2 4 6 10 4 2 6 8 2 10 0 10 10 8 6 2 8 10 6 4 10 2 (0 2 2)

Die Inversion dieser Menge befindet sich in der Mitte der Sequenz $\{0, 10, 10, \dots\}$. Noch sieben einzigartige Sequenzen müssen geschaffen werden, um alle 144 Zweiklänge darzustellen. Obwohl es nützlich ist, die Tonmengen wie in den oben angeführten Beispielen zu bezeichnen, werden sie genauer als Tonklassenzyklen betrachtet. Die zyklische Darstellung erweist sich als ein nützliches Werkzeug; in diesem Aufsatz verwende ich beide Darstellungen. Tabelle 1 zeigt alle möglichen Fibonacci-Tonklassenmengen sowohl im zyklischen Format als auch im Standard-Format. Alle diese Sequenzen, außer 11, können mittels Multiplikation von f_1 geschaffen werden.

Man kann l1 von f1 mittels der folgenden Addition herleiten:

$$\begin{array}{r}
 f1 \quad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 1 \ 9 \ 10 \ 7 \ 5 \ 0 \ 5 \ 5 \ 10 \ 3 \ 1 \ 4 \ 5 \ 9 \ 2 \ 11 \\
 \quad \quad \quad + \\
 f1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 1 \ 9 \ 10 \ 7 \ 5 \ 0 \ 5 \ 5 \ 10 \ 3 \ 1 \ 4 \ 5 \ 9 \ 2 \ 11 \ 1 \ 0 \\
 \quad \quad \quad = \\
 l1 \quad 2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 7 \ 11 \ 6 \ 5 \ 11 \ 4 \ 3 \ 7 \ 10 \ 5 \ 3 \ 8 \ 11 \ 7 \ 6 \ 1 \ 7 \ 8 \ 3 \ 11
 \end{array}$$

Die daraus resultierende Sequenz ist die Lucas-Folge $\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots\}$.¹ Alle möglichen geordneten Zweiklänge befinden sich in dieser Sammlung. Die Evangelisten-Sequenz, eine andere wohl bekannte Fibonacci-Sequenz $\{3, 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \dots\}$, befindet sich in der Inversion von f1.²

1.2 Einige einfache Eigenschaften der Sammlung

Obwohl jede individuelle Menge nur minimale Ähnlichkeiten mit Zwölfton-Reihen hat, ist die ganze Sammlung der Fibonacci-Tonmengen ähnlich der Allintervall-Reihe. Hier kommt nicht nur jeder Ton und jedes Intervall gleich oft vor, sondern auch alle möglichen Kombinationen von zwei aufeinander folgenden Intervallen. Da die Intervalle zwischen den aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen auch eine Fibonacci-Sequenz gestalten, können diese Mengen gleichzeitig als Ton- oder Intervallklassenmengen betrachtet werden. In diesem Aufsatz wird das Wort Restklasse verwendet, um auf Intervallklassen und Tonklassen gleichzeitig hinzuweisen.³

In seinem Buch *The Structure of Atonal Music* setzt Allen Forte voraus, dass eine Tonklassenmenge keine wiederholten Tonklassen haben muss.⁴ Aber wiederholte Tonklassen sind von großer Bedeutung für Fibonacci-Tonmengen. Das Faktum, dass wiederholte Töne ein Teil der Menge sind, weist den Komponisten darauf hin, dass er keine anderen Tonklasse-Wiederholungen verwenden soll. Irgendeine Abschweifung von den geordneten Mengen würde die Fibonacci-Beziehung verdrehen.

1.3 Warnung

Bevor ich zur Analyse weitergehe, soll erwähnt werden, dass die Transposition dieser Menge unsere Notation der Fibonacci-Eigenschaft verdreht. Man nehme z.B. die Menge $A = T(f1, 1)$:

$$A \quad 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6 \ 9 \ 2 \ 10 \ 11 \ 8 \ 6 \ 1 \ 6 \ 6 \ 11 \ 4 \ 2 \ 5 \ 6 \ 10 \ 3 \ 0 \ 2 \ 1$$

Diese Sequenz sieht aus, als hätte sie keine Fibonacci-Eigenschaften, weil sie nicht in ihrer Normalform angeführt ist. Nur eine Analyse der Intervalle zwischen den aufeinander folgenden Tonklassen würde eine Fibonacci-Sequenz enthüllen. Obwohl feste Ton-Nummeration einige Vorteile hat, verdreht sie unsere Notation der Fibonacci-Eigenschaft.

2.0 Analyse

Wir fangen den Analyseteil dieses Aufsatzes mit einer allgemeineren Erwägung der Eigenschaften von Fibonacci-Sequenzen und Moduli an. An dieser Stelle ist es hilfreich, eine Definition einzuführen.

DEFINITION. Sei n eine ganze Zahl. Sei f_n eine Fibonacci-Sequenz von Zahlen, in der für die aufeinander folgenden Glieder $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ die folgende Beziehung gilt: $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$. Seien $f_0 = x$ und $f_1 = z$. Sei m eine ganze Zahl, die als Modulus verwendet wird.

2.1 Perioden, beschränkte Perioden, und Multiplikatoren

Die Periode einer Fibonacci-Sequenz (mod m) ist die kleinste Zahl n , für die die folgende Beziehung gilt: $f_n \equiv x \pmod{m}$ und $f_{n+1} \equiv z \pmod{m}$.

f5 2 1 3 4 7 11 6 5 11 4 3 7 10 5 3 8 11 7 6 1 7 8 3 11

Die Periode von f1 und f5 ist 24. Dem Leser fällt auf, dass die Perioden der anderen Mengen sich von denen der gegebenen Mengen unterscheiden; wir werden bald die Periode der anderen erforschen. Vorab sehen wir uns einige weitere einfache Eigenschaften an. Es ist zu bemerken, dass die 24 Töne zwei Untermengen von 12 gestalten; die zweite ist gleich die erste mal 5: diese Menge hat eine beschränkte Periode von 12. Eine beschränkte Periode wird von der kleinsten Zahl n , für die die Beziehung $f_n \equiv s(x)$ und $f_{n+1} \equiv s(z) \pmod{m}$ für eine ganze Zahl s gilt, bezeichnet; s heißt Multiplikator, und in den Fällen von f1, 11, und f2 sind $s = 5$ und $n = 12$. Eine Fibonacci-Sequenz (mod m) hat immer entweder 1, 2 oder 4 dieser beschränkten Untermengen.⁵ f0, f3 und f6 haben nur eine beschränkte Untermenge (sie haben keine beschränkte Periode). Die restlichen Mengen (f1, 11, f2, und f4) enthalten 2 beschränkte Untermengen. Wenn eine Menge keine beschränkte Periode hat, ist sie äquivalent zu sich selbst, wenn sie mit 5

multipliziert wird. Dies zeigt die spezielle Bedeutung der Zahl 5 für die Mod 12-Sammlung: 5 ist die kleinste relativprime Zahl zu 12 (außer 1), und es lässt sich sehen, dass 5 der Multiplikator der Fibonacci-Mod 12-Mengen ist.

2.2 Invertierbarkeit

Alle Fibonacci-Sequenzen $f_n \pmod{m}$ können in eine Sequenz $m - (f_n \pmod{m})$ invertiert werden, die auch die Fibonacci-Eigenschaft hat.⁶ Das invertierte Gegenstück einer Menge f_n wird f_n' bezeichnet, wenn Unterscheidung nötig ist. f_1 und l_1 haben die Periode 24, können aber in eine einzigartige Fibonacci-Sequenz invertiert werden; somit haben f_1 und l_1 beide 48 Restklassen. f_2 hat auch die Periode 24, aber enthält ihre Inversion in der Mitte der Sequenz; folglich hat f_2 24 Restklassen. f_3 hat die Periode 6 und kann in eine einzigartige Sequenz invertiert werden; in der Folge hat f_3 insgesamt 12 Restklassen. f_4 enthält ihre eigene Inversion, und hat 8 Restklassen. f_6 ist gleich ihrer Inversion und hat 3 Restklassen. f_0 hat nur eine Restklasse und ist gleich sich selbst, wenn sie invertiert wird. Tabelle 2 zeigt die gesamten Vorkommen von jeder Restklasse in den Fibonacci-Mengen.

2.3 Primzahlen und Untermengen

Die Abwesenheit bestimmter Restklassen in f_1 und f_5 ist das direkte Ergebnis des verwendeten Modulus. Modulus 12 ist ein defektiver Modulus, denn die Fibonacci-Sequenz enthält kein vollständiges Restesystem modulo 12.^{7,8} Restklasse 6 fehlt in f_1 . Dies resultiert daraus und könnte als Beweis dafür betrachtet werden, dass jede Fibonacci-Zahl, die durch 6 dividiert werden kann, auch durch 12 teilbar ist. Restklassen 0 und 9 fehlen in l_1 . Dies beweist, dass keine Lucas-Zahl durch 12 teilbar ist und dass keine Lucas-Zahl durch 12 mit einem Rest von 9 teilbar ist. Weil Restklasse 0 in l_1 fehlt, ist sie die einzige Menge, in der es keine sich wiederholenden Töne oder Intervalle gibt.

In f_1 und l_1 sind alle aufeinander folgenden Zahlen relativprim zu dem Modulus (f_n, f_{n+1}, m) = 1. Wir weisen auf f_1 und l_1 als Primzahlen hin. Diese Primzahlen resultieren in denselben Untermengen, wenn sie mit der gleichen Zahl multipliziert werden. Zuvor haben wir f_2 von $(f_1 * 2)$ hergeleitet, aber f_2 kann auch von $(l_1 * 2)$ hergeleitet werden. Die Abwesenheit bestimmter Restklassen in den Mengen f_2 , f_3 , f_4 und f_6 ergibt sich aber aus einem anderen Grund als die Abwesenheiten in den Mengen f_1 und l_1 . Die

Abwesenheiten bestimmter Restklassen in diesen Mengen resultieren daraus, dass keine aufeinander folgenden Zahlen zu dem Modulus relativprim sind: $(f_0, f_1, m) = k$ wenn $k \geq 2$. Alle geordneten Zweiklänge sind mit dem Modulus 12 reduzierbar; wir nennen solche Mengen Untermengen. Dies erklärt, warum die Periode und andere Eigenschaften der Untermengen sich von denen der Mengen f_1 und l_1 unterscheiden. Z.B. wenn wir f_2 analysieren, in der $f_0 = 0$ und $f_1 = 2$ mit einem Modulus 12 sind, analysieren wir eigentlich eine kongruente Sequenz, in der $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ mit dem Modulus 6 sind. Es lohnt sich, die Untermengen in ihren Primformen anzusehen; alle Untermengen der Mod 12-Sammlung werden in Tabelle 3 in ihrer Primform gezeigt.

Die nächstgrößte gleichschwebende Untermenge der Zwölftonskala ist die Sechstonstonskala. Verwendeten wir nur 6 Töne in der Oktave, hieße f_2 eigentlich $f_1 \pmod{6}$, eine Primmenge in dem Mod 6-Universum. Mit dem Modulus 6 sind die Fibonacci-Sequenz und Lucas-Folge ein Teil derselben Sequenz; die Lucas-Folge fängt in der Mitte der beschränkten Periode von f_1 an. Alle Restklassen kommen vor; Modulus 6 ist kein defektiver Modulus. Mit 6 gleichschwebenden Intervallen in der Oktave wäre es auch möglich die Mengen f_4 sowie f_0 und f_6 zu schaffen. Zusammen mit f_2 enthalten diese Mengen alle $6^2 = 36$ möglichen Zweiklänge der Sechstonstimmung. Das Diagramm in Tabelle 3 zeigt die Beziehung zwischen Obermengen und Untermengen in der Mod 12-Sammlung. Die Mod 6-Sammlung ist sich von f_1 ausbreitend zu sehen. f_4 sollte sowohl als $f_1 \pmod{3}$ als auch als $f_2 \pmod{6}$, eine Untermenge in der Mod 6-Sammlung, betrachtet werden. f_3 ist keine Untermenge von f_2 , weil es unmöglich wäre, f_3 mit einer Sechstonstimmung zu schaffen.

Eine andere gleichschwebende Untermenge der Zwölftonskala ist die Viertonskala; sie enthält $4^2 = 16$ mögliche Zweiklänge. Tabelle 3 zeigt, wie die Lucas-Folge und Fibonacci-Sequenz mit Modulus 4 einzigartig bleiben, obwohl sie mit den Moduli 6, 3, 2 und 1 dieselbe Sequenz mit verschiedenen Anfangspunkten sind. f_6 ist kongruent zu einer Fibonacci-Sequenz, in der $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ mit einem Modulus $m = 2$ sind. f_6 und f_0 sind die einzigen Mengen, deren Periode eine ungerade Zahl ist. Wenn $m > 2$ ist, haben alle Fibonacci-Sequenzen (\pmod{m}) eine gerade Periode.⁹ Alle Moduli, die Divisoren von 12 sind (Moduli 6, 4, 3, 2, und 1), sind nicht defektiv. Obwohl alle Multiplikationen eines defektiven Modulus defektive Moduli sind, folgt das nicht, dass ein Divisor desselben defektiven Modulus defektiv ist.¹⁰

2.4 Semisymmetrie

Tabelle 4 zeigt die Semisymmetrie in den Tonklassenzyklen f1 und l1. Jeder Meridian verbindet identische Tonklassen auf gegenüberliegenden Seiten der Mengen. Die semisymmetrische Natur der Fibonacci-Sequenzen wird am besten verstanden, wenn die Sequenz sich in die negativen Fibonacci-Zahlen f_{-n} erstreckt. Hervorzuheben ist die Abwechslung in der Sequenz von negativen und positiven Zahlen:

... 34 -21 13 -8 5 -3 2 -1 1 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 ...

Die 0 dient als Angelpunkt, so dass jede zweite Restklasse ihrem gegenüberliegenden Gegenstück entspricht. Die Restklassen dazwischen sind die Inversionen ihrer Gegenstücke. Wenn f_{2n} eine gerade Position in der Fibonacci-Sequenz $f_n \pmod{m}$, in der $f_0 = 0$ ist, bezeichnet, dann sind $f_{2n} \equiv m - f_{-2n} \pmod{m}$ und $f_{2n-1} \equiv f_{-2n+1} \pmod{m}$. Die Lucas-Folge hat eine ähnliche Eigenschaft:

... -76 47 -29 18 -11 7 -4 3 -1 2 1 3 4 7 11 18 29 47 76 ...

In der Lucas-Folge dient 2 als Angelpunkt statt 0, und die Eigenschaft der Fibonacci-Sequenz ist umgekehrt, so dass, wenn $l_0 = 2$ und $l_1 = 1$ sind, daraus folgt, dass $l_{2n} \equiv l_{-2n} \pmod{m}$ und $l_{2n-1} \equiv m - l_{-2n+1} \pmod{m}$ sind.

2.5 Intervallzyklen

Die Intervallzyklen sind ein Mitglied der Tonklassenzyklenfamilie; sie eignen sich, wegen ihrer arithmetischen und gleichschwebenden Natur, gut als Werkzeuge für die Analyse von Fibonacci-Tonklassenmengen. Die Intervallzyklen werden in Tabelle 5 gezeigt.¹¹ Der Intervallklassenzyklus oder Zyklen, zu dem bzw. zu denen eine Fibonacci-Tonmenge gehört, kann, wegen der definierenden Beziehung der Sequenz, von irgendeinem geordneten Zweiklang in einer Tonmenge bestimmt werden. Die Elemente von f1 und l1 gehören zu C1 und C5; wir haben individuelle Abwesenheiten zur Kenntnis genommen. Die Elemente von f2 gehören zu C2₀. Die Elemente der Menge f3 werden in C3₀ gefunden, und die Elemente von f4 in C4₀. Die Elemente von f6 gehören zu C6₀. Diese Trennung der Sonoritäten ist von großer hörbarer Bedeutung. Auch zu bemerken ist, dass jeder dritte Ton von f1 und l1 zu C2₀ gehört, die Töne dazwischen zu C2₁.¹²

f1 0 1 1 2 3 5 8 1 9 10 7 5 0 5 5 10 3 1 4 5 9 2 11 1

l1 6 1 7 8 3 11 2 1 3 4 7 11 6 5 11 4 3 7 10 5 3 8 11 7

Dem wachsamem Leser wird auffallen, dass dieses Muster, dass die Elemente zu $\dots, C_{2_0}, C_{2_1}, C_{2_1}, C_{2_0}, C_{2_1}, C_{2_1}, \dots$, oder noch allgemeiner zu $\{\dots, x, z, z, x, z, z, \dots\}$ gehören, ein bekanntes Fibonacci-Muster ist. Es lässt sich sehen, dass eine Beschränkung der Fibonacci-Mengen f_1 und l_1 mit verallgemeinerten Intervallklassenzyklen erfolgen kann: $C_{2_0} + C_{2_1} = C_{2_1}$ und $C_{2_1} + C_{2_1} = C_{2_0}$. Die Subskripte der Zyklen gestalten eine Fibonacci-Sequenz (mod 2), nämlich $\{\dots, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \dots\}$. Wenn eine Menge mit $C_{2_0} + C_{2_0} = C_{2_0}$ anfängt, besteht die ganze Sequenz aus Elementen des Zyklus C_{2_0} (wie z.B. in f_0, f_2, f_4 , und f_6). Auch zu bemerken ist, dass jedes vierte Glied von f_1 und l_1 ein Glied von C_{3_0} ist (d.h. durch 3 teilbar ist); alle Tonklassen dazwischen gehören der oktatonischen Menge $C_{3_{1,2}}$ an. Wir könnten eine mathematische Regel einführen, nämlich dass, wenn $f_0 \in C_{n_x}$ und $f_1 \in C_{n_z}$, wir eine Fibonacci-Sequenz (mod n) verwenden und mit den Zahlen $x + z$ anfangen, um eine verallgemeinerte Fibonacci-Sequenz zu schaffen. Tabelle 6 zeigt alle möglichen verallgemeinerten Fibonacci-Intervallzyklensequenzen.

2.6 Gleichbleibende Drei- und Vierklänge

Jeder geordnete Zweiklang ist in einem gleichbleibenden Dreiklang enthalten. Das Wort gleichbleibend wird hier in Bezug auf den Inhalt eines Drei- oder Vierklanges verwendet; die Reihenfolge der Töne wird außer Acht gelassen. Wir wissen von der definierenden Beziehung und dem Kommutativgesetz der Addition, dass jedes Mal, wenn ein geordneter Zweiklang vorkommt, der nach diesem Zweiklang folgende Ton gleich wäre, selbst wenn die Reihenfolge der Töne des vorherigen geordneten Zweiklangs umgekehrt wäre. Es ist die Reihenfolge, die bestimmt, was diesem Dreiklang folgt. Dreiklänge, die mit einem Identitäts-Zweiklang (d.h. mit einem Zweiklang, dessen zwei Restklassen identisch sind) anfangen, z.B. $\{x, x, y\}$, haben gar kein gleichbleibendes Gegenstück, mit einer Ausnahme, denn der Dreiklang $\{6, 6, 0\}$ gestaltet eine Durchschnittsmenge mit seinen zwei gleichbleibenden Gegenstücken und hat drei mögliche Reihenfolgen. Daher gibt es 11 Dreiklänge, die kein gleichbleibendes Gegenstück haben. Es gibt noch 11 Dreiklänge, die mit ihrem gleichbleibenden Gegenstück eine Durchschnittsmenge gestalten; alle kommen in der Form: $\{x, 0, x\}$ und $\{0, x, x\}$ vor, wenn $1 \leq x \leq 11$. Es gibt

55 übrige Paare von Dreiklängen, die einander nicht schneiden: $\{x, y, z\}$ und $\{y, x, z\}$. Tabelle 7 zeigt Beziehungen zwischen allen gleichbleibenden Dreiklängen in den Primmengen. Der Anfangspunkt jedes geordneten Zweiklanges wird hier von einem Punkt über dem ersten Element bezeichnet. Eine Linie oder ein Bogen verbindet einen Dreiklang mit seinem gleichbleibenden Gegenstück, falls sich die Dreiklänge in der gleichen Sequenz befinden.

Gleichbleibende Vierklänge werden auch in der Sammlung gefunden. Tabelle 8 zeigt alle gleichbleibenden Vierklänge in den Primmengen. Jeder Vierklang, dessen zweites Element 4 oder 8 ist, hat zur Folge 2 gleichbleibende Vierklänge. Es lässt sich sehen, dass jeder Fall, in dem ein Vierklang an drei verschiedenen Stellen vorkommt, eine Untermenge von $C4_x$ involviert, und dass das zweite Element dieses Vierklanges immer 4 oder 8 ist. Das zweite Element eines jeglichen Fibonacci-Vierklanges ist in jeder Addition involviert, die den Vierklang komplettiert. Die Tonklassen in $C4_x$ sind, wegen der Natur der Menge, getrennt durch Viererintervalle; die Hinzufügung eines zweiten Elements 4 (oder 8) zu irgendeinem Element resultiert in einer anderen Tonklasse in $C4_x$. Die Hinzufügung noch eines dritten Elements 4 (oder 8) zu diesem Dreiklang schließt das dritte Element der Menge $C4_x$ ab. Die 4 oder 8 sind wie eine additive Identität für $C4_x$. Jeder Vierklang, der mit 6 oder 1 anfängt, hat ein gleichbleibendes Gegenstück (siehe z.B. die Vierklänge $\{6, 1, 7, 8\}$ und $\{6, 7, 1, 8\}$, oder $\{6, 2, 8, 10\}$ und $\{6, 8, 2, 10\}$ in f_2). Es gibt keine Fälle gleichbleibender Mengen größer als Vierklänge.

Es gibt noch ein Phänomen, das hier erwähnt werden soll. Denn aus $f_{n+2} - f_{n+1} = f_n$, folgt, dass jedes Element, das einem geordneten Zweiklang vorangeht, dasselbe wäre, selbst wenn der Zweiklang in umgekehrter Reihenfolge wäre (z.B. haben wir $\{1, 1, 2, 3\}$ und $\{11, 2, 1, 3\}$, oder $\{9, 4, 1, 5\}$ und $\{3, 1, 4, 5\}$). Obwohl sie nicht gleichbleibend im traditionellen Sinn sind, sollten sie trotzdem im weitesten Sinn als gleichbleibend betrachtet werden.

3.0 Invers-Fibonacci-Tonklassenmengen

Neue lineare Möglichkeiten ergeben sich aus Invers-Fibonacci-Tonmengen. In der Invers-Fibonacci-Sequenz gilt $f_n - f_{n+1} = f_{n+2}$ für $\dots, f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots$. Jedes aufeinander folgende Glied ist gleich der Summe der zwei vorherigen Glieder. Die Invers-Fibonacci-Sequenz fängt so an: $\{0, 1, -1, 2, -3, 5, -8,$

13, -21, ...}. Invers-Fibonacci-Tonmengen sind gleich den rückschreitenden Fibonacci-Sequenzen (mod 12), und werden mit $-f_n$ bezeichnet:

-f1 0 1 11 2 9 5 4 1 3 10 5 5 0 5 7 10 9 1 8 5 3 2 1 1

Zu bemerken ist, dass alle ungeraden Glieder der Sequenz f_{2n-1} unverändert bleiben, wenn die Sequenz rückschrittlich ist; die geraden Glieder zwischen f_{2n} sind die Inversion der originalen Sequenz f_1 . Tabelle 9 zeigt alle Invers-Fibonacci-Tonklassenmengen. Invers-Tonmengen sind identisch mit den originalen Zyklen, aber entgegen dem Uhrzeigersinn gelesen.

4.0 Fibonacci-Harmonie

Nach der Erwägung der Fibonacci-Sequenz von einem hauptsächlich linearen (melodischen) Standpunkt aus konzentrieren wir uns jetzt auf die harmonischen Eigenschaften der Sequenz. Für alle Sequenzen f_x und f_y gibt es eine Sequenz h_z , die auch die Fibonacci-Eigenschaft hat.¹³ Folgendes ist ein Beispiel aus der Mod 12-Sammlung:

f1	1	1	2	3	5	8	1	9	10	7	5	0	5	5	10	3	1	4	5	9	2	11	1	0
	-																							
f2	0	2	2	4	6	10	4	2	6	8	2	10	0	10	10	8	6	2	8	10	6	4	10	2
	=																							
hf1'	1	11	0	11	11	10	9	7	4	11	3	2	5	7	0	7	7	2	9	11	8	7	3	10

Wenn wir zwei Mengen in Eins-zu-eins-Korrespondenz abziehen (z.B. $\{f_1: 1, 1, \dots\} - \{f_2: 0, 2, \dots\} = \{hf_1': 1, 11, \dots\}$), ist hf_n eine harmonisch ausgedrückte Fibonacci-Intervallklassenmenge. Da es 144 mögliche geordnete Zweiklänge gibt, folgt, dass es 144 mögliche harmonische Kombinationen mit jedem Zweiklang gibt. Siehe z.B. der erste oben gezeigte Zweiklang in $f_1 \{f_1: 1, 1, \dots\}$, dieser Zweiklang kann mit allen 144 möglichen Zweiklängen $\{f_n: x, y, \dots\}$ gepaart werden, um eine einzigartige Sequenz $\{hf_z: v, w, \dots\}$ zu schaffen. Wenn $x = 1$ und $y = 1$, ist die daraus resultierende Sequenz $\{f_1: 1, 1, \dots\} - \{f_0: 0, 0, \dots\} = \{hf_1: 1, 1, \dots\}$. Wenn $x = 0$ und $y = 0$, ist die daraus resultierende harmonische Sequenz immer gleich der originalen Sequenz $\{f_1: 1, 1, \dots\} - \{f_0: 0, 0, \dots\} = \{hf_1: 1, 1, \dots\}$. Das Faktum, dass es 144 mögliche harmonische Kombinationen einer Menge gibt, impliziert, dass eine Menge auf 144 verschiedenen Weisen

ausgedrückt werden kann. Nehmen wir ein Beispiel: Das oben angeführte Beispiel war $\{f_1 : 1, 11, \dots\}$. Unter den 143 anderen Möglichkeiten hätten wir dieselbe harmonische Menge mit $\{f_2 : 2, 2, \dots\} - \{f_1 : 1, 3, \dots\} = \{f_1 : 1, 11, \dots\}$ bilden können. Ebenfalls klar ist, dass ohne Rücksicht darauf, wie viele Fibonacci-Mengen verwendet werden, die Beziehung zwischen den Mengen immer eine Fibonacci-Beziehung ist. Diese Eigenschaften gelten auch für Invers-Fibonacci-Mengen, obwohl keine Fibonacci-Harmonie aus dem Paaren einer Menge f_n mit einer Invers-Menge $-f_k$ resultiert.

5.0 Nonmodulare Fibonacci-Tonmengen

Nonmodulare Fibonacci-Tonmengen wurden schon von etlichen Komponisten und Theoretikern erforscht.¹⁴ Sie sind, wegen ihrer einzigartigen Sonorität und goldenen Verhältnisse, von besonderem Interesse. Diese Mengen können von den ersten zwei Zahlen n und m der Sequenz klassifiziert werden, denn sie bestimmen die ganze Sequenz. Es ist praktisch, das Symbol $F_{n,m}t$ zu verwenden, um auf nonmodulare Fibonacci-Tonmengen hinzuweisen, wenn t die Kardinalzahl der Menge ist. Invertierte Mengen werden mit $F_{-n,-m}t$ bezeichnet, so dass die Menge $F_{-1,-2}8 = \{-1, -2, -3, -5, -8, -13, -21, -34\}$ ist. In Normalform sind n und m kleiner als 12. Natürlich ist auch möglich, dass die Menge sich in die negativen Zahlen der Sequenz f_n erstreckt, wie z.B. in $F_{-21,13}15 = \{-21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8\}$. Wenn Mengen auch mehrere negative Fibonacci-Zahlen enthalten, gestaltet die Menge einen Fibonacci-Keil. Tabelle 10 zeigt die Normalformen für die Menge f_1 . Diese Tabelle wurde von Schnittmengen von Intervall und Tonklassen in der Menge organisiert, die von den original konstruierten Tonklassenmengen leicht hergeleitet werden können. Diese Mengen können nur so groß sein, weil sie sich - mit größeren Kardinalzahlen - rasch unserer Hörgrenze annähern. $F_{0,0}t$ ist die Ausnahme, und kann eine unendliche Kardinalzahl haben. Eine Grenze von 112 wurde auf beiden Seiten der Sequenzen f_n und f_{-n} gezogen; diese Anzahl von Halbtönen scheint gut geeignet, da sie sich von 30 – 16.000 Hz erstreckt.

5.1 Invers-Fibonacci-Tonmengen

Ebenso ist die Konstruktion von Invers-Fibonacci-Tonmengen möglich. An dieser Stelle ist es hilfreich eine andere Darstellung der Invers-Fibonacci-Tonklassenmengen einzuführen, in der jede Restklasse einen Absolutbetrag kleiner als 12 haben muss:

-f1 0 1 -1 2 -3 5 -8 1 -9 10 -7 5 0 5 -5 10 -3 1 -4 5 -9 2 -11 1

Der Tonklasseninhalte dieser Sequenz ist selbstverständlich identisch mit dem der originalen Sequenz.

In der Konstruktion der Invers-Fibonacci-Mengen ist es praktisch, diese Gestaltung der Sequenzen zu verwenden. Invers-Tonmengen werden von den ersten zwei Zahlen n und m klassifiziert: $-F_{n,m}$. n und m können negativ oder positiv sein und müssen einen Absolutbetrag kleiner als 12 haben, so dass $-F_{8,-7} = \{8, -7, 15, -22, 37, -59\}$ ist. Diese Mengen können sich auch in die negativen Fibonacci-Zahlen erstrecken, wie z.B. $-F_{5,3} = \{5, 3, 2, 1, 1, 0, 1, -1, 2, -3\}$. Tabelle 11 zeigt Invers-Fibonacci-Tonmengen von -11 in Normalform mit derselben Grenze von 112 Halbtönen. Der Invers-Fibonacci-Keil dehnt sich aus. Die Mengen konvergieren auf beiden Seiten des Angelpunkts 0 zu $(1 - 0,61803\dots)$. Das beste Beispiel dafür ist die Menge $-F_{0,1} = \{0, 1, -1, 2, -3, 5, -8, 13, -21, 34, -55\}$; die letzten zwei negativen Elemente der Menge sind $-21/-55 = 1 - 0,618$, die letzten positiven $13/34 = 1 - 0,617647\dots$.

6.0 Über Fibonacci modulo 12 hinaus

In diesem Aufsatz versuchte ich, mit der Verwendung der gleichschwebenden Zwölftonstimmung eine gründliche Anwendung der Fibonacci-Zahlen auf Tonstruktur zu schaffen. Er lässt jedoch vieles offen, was bezüglich der Anwendung von Fibonacci-Sequenzen auf Tonstruktur noch erforscht werden muss. In meinem nächsten Aufsatz untersuche ich Fibonacci-Sequenzen mit der Verwendung anderer Stimmungen sowie eine andere rekursive Sequenz von größerer Komplexität: die Tribonacci-Sequenz, die mit $\{0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, \dots\}$ beginnt.

Anmerkungen

Ich möchte Alan Fletcher für seine wertvollen Vorschläge während des Verfassens dieses Aufsatzes danken.

Ich danke auch Thomas Pimingsdorfer für seine Hilfe bei der deutschen Version.

- 1 Diese Sequenz wurde nach dem französischen Mathematiker Edouard Lucas (1842 – 1891) benannt, der der Fibonacci-Sequenz ihren Namen gegeben hat und der auch vorgeschlagen hat, die Lucas-Folge $\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots\}$ als Fibonacci-Sequenz zu bezeichnen. Diese Sequenz hat viele interessante Beziehungen zu der Fibonacci-Sequenz und auch etliche einzigartige Eigenschaften, die nicht in der Fibonacci-Sequenz gefunden werden. Eine Eigenschaft, die hier erwähnt werden soll, ist, dass $f_{n-1} + f_{n+1} = l_n$ für alle n , wenn $f_n =$ die n -te Fibonacci-Zahl, und $l_n =$ die n -te Lucas Zahl ist. Dies ist die Beziehung, mit der ich zuvor 11 von f1 hergeleitet habe. Für eine vorzügliche Einleitung in die Fibonacci-Zahlen und den goldenen Schnitt ist Hoggatt 1969 sehr zu empfehlen.
- 2 Die Evangelisten-Sequenz wurde wegen des Vorkommens der Zahlen 2, 5, 7 und 12 bei Matthäus 14, 17-20, Johannes 6, 9-13, und Matthäus 15, 34-37 so benannt. Eine von den vielen interessanten Beziehungen dieser Sequenz zur Fibonacci-Sequenz ist $e_n = f_{n+3} - f_{n-2}$ für alle n , wenn $e_n =$ die n -te Zahl der Evangelisten-Sequenz und $f_n =$ die n -te Fibonacci-Zahl ist.
- 3 Eine Restklasse ist die Kongruenzklasse aller ganzen Zahlen, die denselben Divisionsrest haben, wenn sie durch den Modulus m dividiert werden. Kongruenz ist eine Äquivalenz-Beziehung. Wenn $a \equiv b \pmod{m}$, dann gehören a und b zu derselben Restklasse von m . Z.B. -10, 2 und 14 gehören alle zu derselben Restklasse modulo 12.
- 4 Forte 1973: 3.
- 5 Siehe Mandelson 1968: 276. Mandelson weist auf diese Untermengen als Gruppen hin, obwohl sie nicht Gruppe im strengen mathematischen Sinn sind. Hier wird das Wort beschränkte Periode verwendet, um Verwechslungen zu vermeiden.
- 6 BEWEIS. Nehmen wir eine Fibonacci-Sequenz $F_n \pmod{m}$, die mit $f_0, f_1, f_0 + f_1 \pmod{m}, \dots$ beginnt. Es gibt eine Sequenz $m - [F_n \pmod{m}]; m - f_0, m - f_1, m - (f_0 + f_1) \pmod{m}, \dots$. Und es lässt sich sehen,

dass die ersten zwei Glieder der Sequenz $(m - f_0) + (m - f_1) = 2m - (f_0 + f_1) \equiv m - (f_0 + f_1) \pmod{m}$ sind.

Daher ist die Sequenz $m - [F_n \pmod{m}]$ eine Fibonacci-Sequenz.

- 7 Für eine weitere Diskussion der defektiven Moduli und der vollständigen Restesysteme siehe Shaw 1968, Bruckner 1970, und Burr 1971.
- 8 Ein vollständiges Restesystem modulo m ist eine Menge, die alle möglichen Restklassen modulo m enthält. Z.B. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ oder $\{-5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$.
- 9 Wall 1960, 4. Satz.
- 10 Shah 1968, 2. Satz.
- 11 George Perle führte die Abkürzung Cn_x ein. n ist das Intervall und x bezeichnet die kleinste Tonzahl des Zyklus, siehe Perle 1985: 198-200.
- 12 Diese Eigenschaft lässt sich in der Fibonacci-Sequenz klar sehen, denn jede dritte Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von 2, jede vierte ein Vielfaches von 3, jede fünfte ein Vielfaches von 5, jede sechste ein Vielfaches von 8 usw. Die Lucas-Folge hat ähnliche Eigenschaften; jede dritte Lucas-Zahl ist ein Vielfaches von 2, jede vierte ein Vielfaches von 3, aber die Lucas-Folge ist in dieser Hinsicht komplizierter als die Fibonacci-Sequenz; der Leser wird angeregt dies zu erforschen, oder siehe Hoggatt 1969.
- 13 BEWEIS. Wir nehmen zwei Fibonacci-Sequenzen mit folgenden definierenden Beziehungen: $f_x + f_{x+1} = f_{x+2}$, und $l_y + l_{y+1} = l_{y+2}$. Jetzt leiten wir eine dritte Sequenz U_z von $u_z = f_x - l_y$, $u_{z+1} = f_{x+1} - l_{y+1}$ und $u_{z+2} = f_{x+2} - l_{y+2}$ ab. Nun muss bewiesen werden, dass $u_z + u_{z+1} = u_{z+2}$, und es ist klar, dass $(f_x - l_y) + (f_{x+1} - l_{y+1}) = (f_x + f_{x+1}) - (l_y + l_{y+1}) = (f_{x+2} - l_{y+2})$. Deswegen hat U_z die Fibonacci-Eigenschaft.
- 14 Kramer 1973: 134-141.

Zitierte Werke

Bruckner, G. 1970. Fibonacci Sequence Modulo A Prime $p \equiv 3 \pmod{4}$. *Fibonacci Quarterly* 8:217-220.

Burr, S. A. 1971. On Moduli for which the Fibonacci Sequence Contains a Complete System of Residues. *Fibonacci Quarterly* 9:497-504.

- Forte, Allen. 1973. *The Structure of Atonal Music*. New Haven: Yale University Press.
- Hoggatt, Verner E. Jr. 1969. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston: Houghton Mifflin.
- Kramer, Jonathan. 1973. The Fibonacci Series in Twentieth-Century Music. *Journal of Music Theory* 17/1:110-150.
- Lendvai, Ernő. 1962. Duality and Synthesis in the Music of Béla Bartók. *New Hungarian Quarterly* III/vii. Reprinted in György Kepes ed., *Module, Proportion, Symmetry, Rhythm*:174-193 (New York: George Braziller, 1966).
- Robinson, D. W. 1963. Amateur Interests in the Fibonacci Series III: Residues of U_n with Respect to Any Modulus. *Fibonacci Quarterly* 1:275-278.
- Perle, George. 1985. *The Operas of Alban Berg, Volume Two: Lulu*. Berkeley and Los Angeles: University of California Press.
- Shah, A. P. 1968. Fibonacci Sequence Modulo m . *Fibonacci Quarterly* 6:139-141.
- Wilcox, Howard. 1992. Generating Fibonacci Sequences of Pitch Classes. *Sonus: A journal of investigations into global musical possibilities* XII/2:44-47.
- Wall, D. D. 1960. Fibonacci Series Modulo m . *American Mathematical Monthly* 67:525-532.

Table 1
Fibonacci Pitch Class Sets

f0 0

f1
0 1 1 2 3 5 8 1 9 10 7 5 0 5 5 10 3 1 4 5 9 2 11 1
0 11 11 10 9 7 4 11 3 2 5 7 0 7 7 2 9 11 8 7 3 10 1 11

l1
2 1 3 4 7 11 6 5 11 4 3 7 10 5 3 8 11 7 6 1 7 8 3 11
10 11 9 8 5 1 6 7 1 8 9 5 2 7 9 4 1 5 6 11 5 4 9 1

f2 0 2 2 4 6 10 4 2 6 8 2 10 0 10 10 8 6 2 8 10 6 4 10 2

f3
0 3 3 6 9 3
0 9 9 6 3 9

f4 0 4 4 8 0 8 8 4

f6 0 6 6

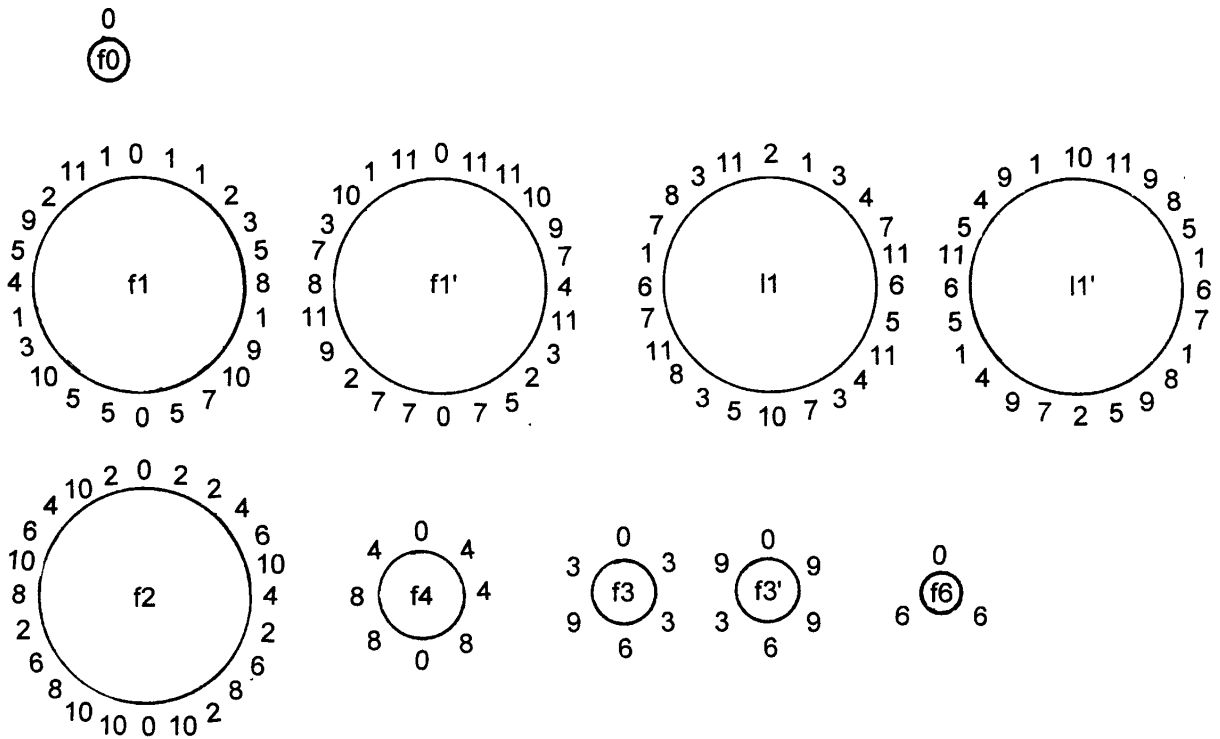


Table 2
Total Occurrences of Each Residue r in fn

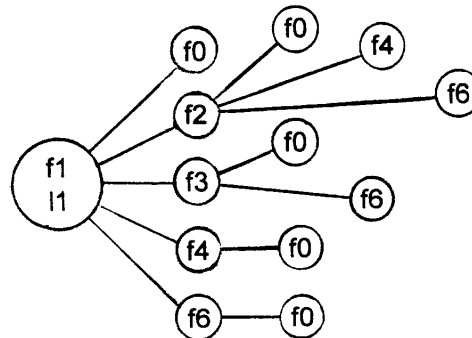
r - # of occurrences					
f0	0 - 1	f1	0 - 2	f1'	0 - 2
	1 - 0		1 - 5		1 - 1
	2 - 0		2 - 2		2 - 2
	3 - 0		3 - 2		3 - 2
	4 - 0		4 - 1		4 - 1
	5 - 0		5 - 5		5 - 1
	6 - 0		6 - 0		6 - 0
	7 - 0		7 - 1		7 - 5
	8 - 0		8 - 1		8 - 1
	9 - 0		9 - 2		9 - 2
	10 - 0		10 - 2		10 - 2
	11 - 0		11 - 1		11 - 5
				l1	0 - 0
					1 - 2
					2 - 1
					3 - 4
					4 - 2
					5 - 2
					6 - 2
					7 - 4
					8 - 2
					9 - 0
					10 - 1
					11 - 4
				l1'	0 - 0
					1 - 4
					2 - 1
					3 - 0
					4 - 2
					5 - 4
					6 - 2
					7 - 2
					8 - 2
					9 - 4
					10 - 1
					11 - 2
f2	0 - 2	f3	0 - 1	f3'	0 - 1
	1 - 0		1 - 0		1 - 0
	2 - 6		2 - 0		2 - 0
	3 - 0		3 - 3		3 - 1
	4 - 3		4 - 0		4 - 0
	5 - 0		5 - 0		5 - 0
	6 - 4		6 - 1		6 - 1
	7 - 0		7 - 0		7 - 0
	8 - 3		8 - 0		8 - 0
	9 - 0		9 - 1		9 - 3
	10 - 6		10 - 0		10 - 0
	11 - 0		11 - 0		11 - 0
				f4	0 - 2
					1 - 0
					2 - 0
					3 - 0
					4 - 3
					5 - 0
					6 - 0
					7 - 0
					8 - 3
					9 - 0
					10 - 0
					11 - 0
				f6	0 - 1
					1 - 0
					2 - 0
					3 - 0
					4 - 0
					5 - 0
					6 - 2
					7 - 0
					8 - 0
					9 - 0
					10 - 0
					11 - 0

to accompany pg. 5

Table 3
Prime Forms of Mod 12 Subsets

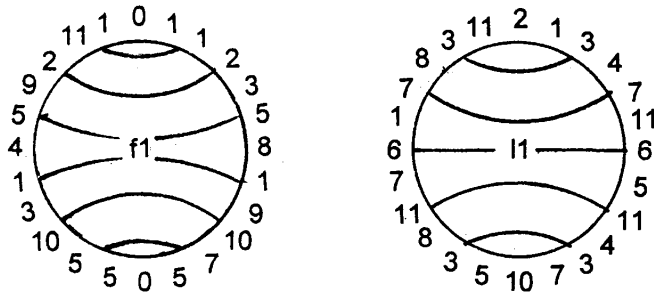
f1 (mod 6)	0	1	1	2	3	5	2	1	3	4	1	5	0	5	5	4	3	1	4	5	3	2	5	1
	0	1	1	2	3	1																		
f1 (mod 4)	0	3	3	2	1	3																		
f1 (mod 3)	0	1	1	2	0	2	2	1																
f1 (mod 2)	0	1	1																					

Mod 12 Subsets and Supersets



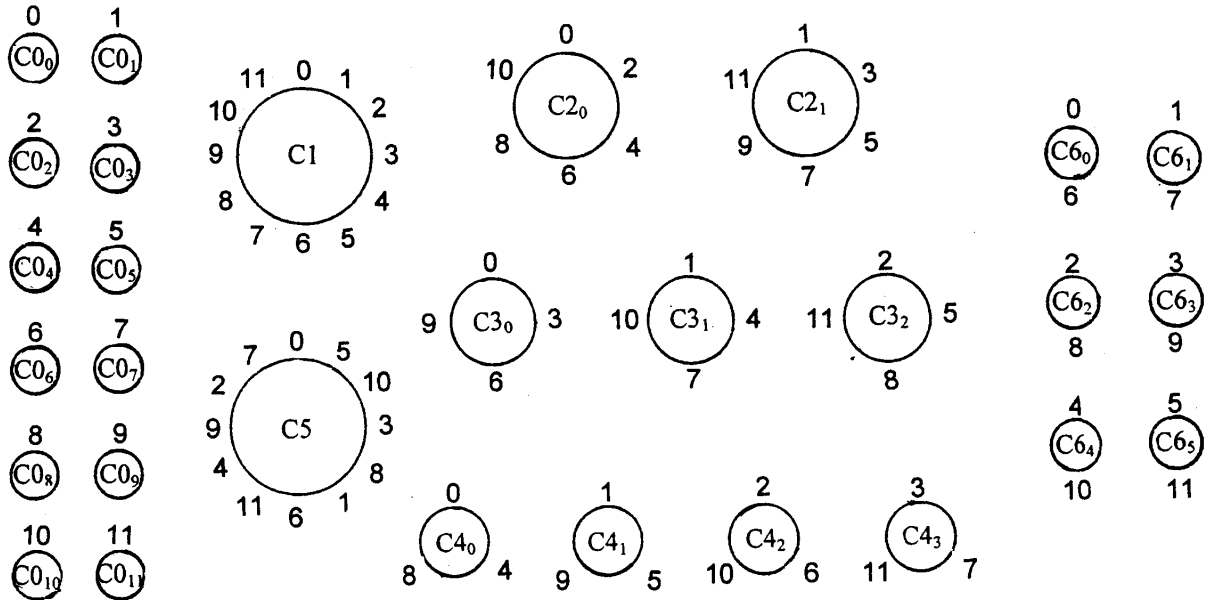
to accompany pg. 6

Table 4
Semi-Symmetry in Pitch Class Cycles



to accompany pg. 6

Table 5
The Interval Cycles



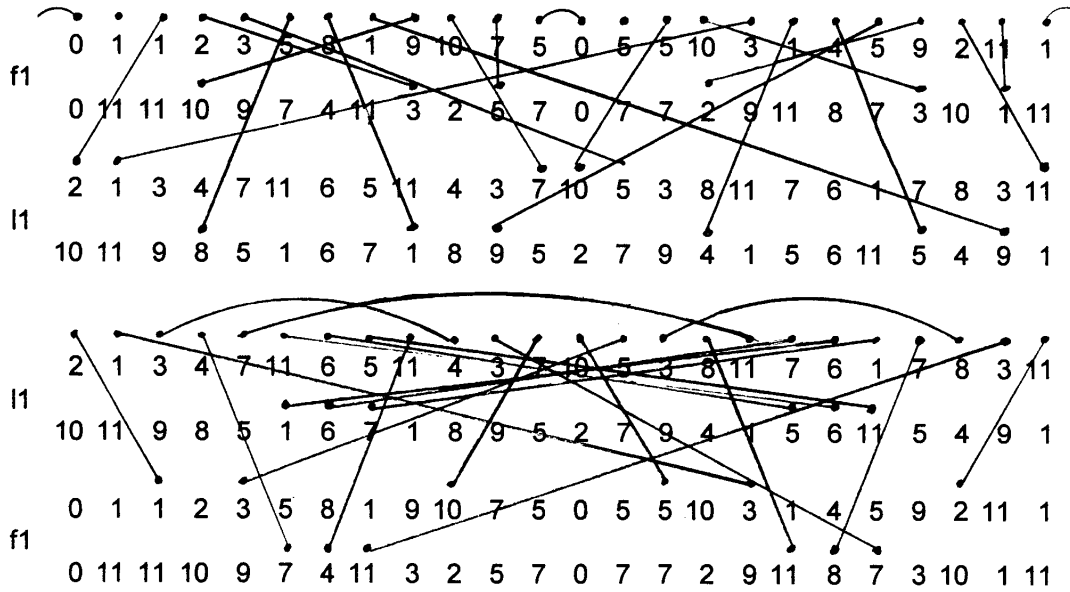
to accompany pg. 7

Table 6
Generalized Fibonacci Interval Cycle Sequences

C2 ₀	C4 ₀
C2 ₀ C2 ₁ C2 ₁	C4 ₀ C4 ₁ C4 ₁ C4 ₂ C4 ₃ C4 ₁
	C4 ₀ C4 ₃ C4 ₃ C4 ₂ C4 ₁ C4 ₃
C3 ₀	C4 ₀ C4 ₂ C4 ₂
C3 ₀ C3 ₁ C3 ₁ C3 ₂ C3 ₀ C3 ₂ C3 ₂ C3 ₁	

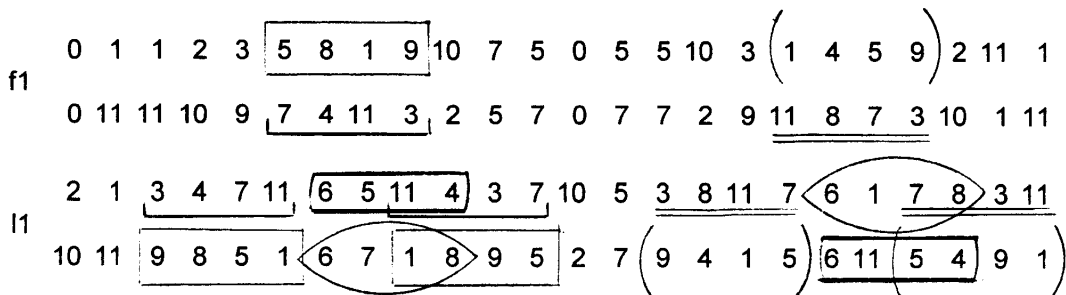
to accompany pg. 8

Table 7
Invariant Trichords in the Prime Sets



to accompany pg. 8

Table 8
Invariant Tetrachords in the Prime Sets



to accompany pg. 8

