

# Fibonacci-Tonfolgen

Casey Mongoven

## 0.0 Einleitung

Obgleich die Fibonacci-Zahlen und ihre Verwandten schon seit langem die Aufmerksamkeit von Komponisten und Theoretikern auf sich gezogen haben, wird ihre Anwendung auf Tonstruktur noch immer nicht völlig verstanden. In seinem Buch *Einführung in die Formen- und Harmoniewelt Bartóks* erörtert Ernő Lendvai, dass Bartók die Fibonacci-Zahlen in der Tonstruktur seiner *Sonate für 2 Klaviere und Schlagzeug* verwendet haben soll. Jonathan Kramer diskutiert in seinem Artikel *The Fibonacci Series in Twentieth-Century Music* kurz die Anwendung der Fibonacci-Zahlen auf Tonstruktur einiger Komponisten wie z.B. Bartók, Walker und Schillinger. Der jüngste Artikel über das Thema wurde von Howard Wilcox verfasst und heißt *Generating Fibonacci Sequences of Pitch Classes*. Alle diese Schriften lassen Fragen nach der möglichen Anwendung der Fibonacci-Sequenz auf Tonstruktur offen. Dieser Aufsatz versucht eine gründliche Anwendung der Fibonacci-Zahlen auf Tonstruktur zu schaffen, und ist beschränkt auf Fibonacci-Tonfolgen, die auf einer zwölftonigen gleichschwebenden Skala basieren, obwohl interessante Ergebnisse auch unter Verwendung anderer Stimmungen und Sequenzen erreicht werden können, wie in einem künftigen Aufsatz gezeigt werden wird.

## 1.0 Fibonacci-Tonklassenfolgen

Ohne einen Modulus würde die Sequenz endlos steigen oder fallen, rasch über die menschliche Hörgrenze hinaus. Mit einem Modulus wird wirklicher Fibonacci-Abstand verloren, aber die Fibonacci-Eigenschaft, dass jede aufeinander folgende Tonklasse die Summe der zwei vorherigen ist, bleibt sogar dann erhalten, wenn die Sequenz das Mod 12-Prisma durchdringt. Die modulare Reduktion der Sequenz auf die Tonklassenfolgen schafft eine wiederkehrende Sequenz mit einer Periode von 24. Zu beachten ist, dass die folgende lineare Ordnung von Tonklassen auch in wirklichem Fibonacci-Abstand vorkommt:

( 13 21 34 55 89 ....)

0 1 1 2 3 5 8 1 9 10 7 5 0 5 5 10 3 1 4 5 9 2 11 1 (0 1 1 ....)  
 C C# C# D Eb F Ab C# A Bb G F C F F Bb Eb C# E F A D B C#

Diese Sequenz lässt sich invertieren:

0 11 11 10 9 7 4 11 3 2 5 7 0 7 7 2 9 11 8 7 3 10 1 11 (0 11 11 ....)  
 C B B Bb A G E B Eb D F G C G G D A B Ab G Eb Bb C# B

Die definierende Beziehung dieser Sequenzen ist  $f_n + f_{n+1} \equiv f_{n+2} \pmod{12}$ , gesprochen  $f_n + f_{n+1}$  ist gleich  $f_{n+2} \pmod{12}$ , wenn  $f_n$  die  $n$ -te Zahl der Sequenz ist. Von jetzt an werden diese Sequenzen als geordnete Tonklassenfolgen bezeichnet; die Kardinalzahl der Tonfolge wird von der Periode der Sequenz bestimmt.

### 1.1 Generation der Sammlung

Mit Modulus 12 gibt es  $12^2 = 144$  mögliche geordnete Zweiklänge  $\{f_n, f_{n+1}\}$  (Identitäten inklusive). Die Sequenz ist periodisch, denn jeder geordnete Zweiklang bestimmt die ganze Sequenz. Diese Fakten ermöglichen die Schaffung einer bestimmten Anzahl von Sequenzen, die alle 144 geordneten Zweiklänge enthalten. Die oben angegebenen Folgen gestalten 48 geordnete Zweiklänge; 96 Zweiklänge bleiben übrig. Eine weitere Sequenz kann durch die Multiplikation der Fibonacci-Sequenz mit 2 geschaffen werden:

0 2 2 4 6 10 4 2 6 8 2 10 0 10 10 8 6 2 8 10 6 4 10 2 (0 2 2 ....)

Die Umkehrung dieser Folge befindet sich in der Mitte der Sequenz  $\{0, 10, 10, \dots\}$ . Noch sieben einzigartige Sequenzen müssen geschaffen werden, um alle 144 Zweiklänge darzustellen. Obwohl es nützlich ist, die Tonfolgen wie in den oben angeführten Beispielen zu bezeichnen, werden sie genauer als Tonklassenzyklen betrachtet. Die zyklische Darstellung erweist sich als ein nützliches Werkzeug; in diesem Aufsatz verwende ich beide Darstellungen. Tabelle 1 zeigt alle möglichen Fibonacci-Tonklassenfolgen sowohl im zyklischen Format als auch im Standard-Format. Alle diese Sequenzen, außer 11, können mittels Multiplikation von  $f_1$  geschaffen werden.

Man kann l1 von f1 mittels der folgenden Addition herleiten:

$$\begin{array}{r}
 f1 \quad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 1 \ 9 \ 10 \ 7 \ 5 \ 0 \ 5 \ 5 \ 10 \ 3 \ 1 \ 4 \ 5 \ 9 \ 2 \ 11 \\
 \quad \quad \quad + \\
 f1 \quad 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 1 \ 9 \ 10 \ 7 \ 5 \ 0 \ 5 \ 5 \ 10 \ 3 \ 1 \ 4 \ 5 \ 9 \ 2 \ 11 \ 1 \ 0 \\
 \quad \quad \quad = \\
 l1 \quad 2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 7 \ 11 \ 6 \ 5 \ 11 \ 4 \ 3 \ 7 \ 10 \ 5 \ 3 \ 8 \ 11 \ 7 \ 6 \ 1 \ 7 \ 8 \ 3 \ 11
 \end{array}$$

Die daraus resultierende Sequenz ist die Lucas-Folge  $\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots\}$ .<sup>1</sup> Alle möglichen geordneten Zweiklänge befinden sich in dieser Sammlung. Die Evangelisten-Sequenz, eine andere wohl bekannte Fibonacci-Sequenz  $\{3, 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \dots\}$ , befindet sich in der Inversion von f1.<sup>2</sup>

## 1.2 Einige einfache Eigenschaften der Sammlung

Obwohl jede individuelle Folge nur minimale Ähnlichkeiten mit Zwölfton-Reihen hat, ist die ganze Sammlung der Fibonacci-Tonfolgen ähnlich der Allintervall-Reihe. Hier kommt nicht nur jeder Ton und jedes Intervall gleich oft vor, sondern auch alle möglichen Kombinationen von zwei aufeinander folgenden Intervallen. Da die Intervalle zwischen den aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen auch eine Fibonacci-Sequenz gestalten, können diese Folgen gleichzeitig als Ton- oder Intervallklassenfolgen betrachtet werden. In diesem Aufsatz wird das Wort Restklasse verwendet, um auf Intervallklassen und Tonklassen gleichzeitig hinzuweisen.<sup>3</sup>

Wiederholte Tonklassen sind von großer Bedeutung für Fibonacci-Tonfolgen. Das Faktum, dass wiederholte Töne ein Teil der Folge sind, weist den Komponisten darauf hin, dass er keine anderen Tonklasse-Wiederholungen verwenden soll. Irgendeine Abschweifung von den geordneten Folgen würde die Fibonacci-Beziehung verdrehen.

## 1.3 Warnung

Bevor ich zur Analyse weitergehe, soll erwähnt werden, dass die Transposition dieser Folge unsere Notation der Fibonacci-Eigenschaft verdreht. Man nehme z.B. die Folge  $A = T(f1, 1)$ :

$$A \quad 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6 \ 9 \ 2 \ 10 \ 11 \ 8 \ 6 \ 1 \ 6 \ 6 \ 11 \ 4 \ 2 \ 5 \ 6 \ 10 \ 3 \ 0 \ 2 \ 1$$

Diese Sequenz sieht aus, als hätte sie keine Fibonacci-Eigenschaften, weil sie nicht in ihrer Normalform angeführt ist. Nur eine Analyse der Intervalle zwischen den aufeinander folgenden Tonklassen würde eine Fibonacci-Sequenz enthüllen. Obwohl feste Ton-Nummeration einige Vorteile hat, verdreht sie unsere Notation der Fibonacci-Eigenschaft.

## 2.0 Analyse

Wir fangen den Analyseteil dieses Aufsatzes mit einer allgemeineren Erwägung der Eigenschaften von Fibonacci-Sequenzen und Moduli an. An dieser Stelle ist es hilfreich, eine Definition einzuführen.

*DEFINITION.* Sei  $n$  eine ganze Zahl. Sei  $f_n$  eine Fibonacci-Sequenz von Zahlen, in der für die aufeinander folgenden Glieder  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  die folgende Beziehung gilt:  $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ . Seien  $f_0 = x$  und  $f_1 = z$ . Sei  $m$  eine ganze Zahl, die als Modulus verwendet wird.

### 2.1 Perioden, beschränkte Perioden, und Multiplikatoren

Die Periode einer Fibonacci-Sequenz (mod  $m$ ) ist die kleinste Zahl  $n$ , für die die folgende Beziehung gilt:  $f_n \equiv x \pmod{m}$  und  $f_{n+1} \equiv z \pmod{m}$ .

f5 2 1 3 4 7 11 6 5 11 4 3 7 10 5 3 8 11 7 6 1 7 8 3 11

Die Periode von f1 und f5 ist 24. Dem Leser fällt auf, dass die Perioden der anderen Folgen sich von denen der gegebenen Folgen unterscheiden; wir werden bald die Periode der anderen erforschen. Vorab sehen wir uns einige weitere einfache Eigenschaften an. Es ist zu bemerken, dass die 24 Töne zwei Teilfolgen von 12 gestalten; die zweite ist gleich die erste mal 5: diese Folge hat eine beschränkte Periode von 12. Eine beschränkte Periode wird von der kleinsten Zahl  $n$ , für die die Beziehung  $f_n \equiv s(x)$  und  $f_{n+1} \equiv s(z) \pmod{m}$  für eine ganze Zahl  $s$  gilt, bezeichnet;  $s$  heißt Multiplikator, und in den Fällen von f1, f11, und f2 sind  $s = 5$  und  $n = 12$ . Eine Fibonacci-Sequenz (mod  $m$ ) hat immer entweder 1, 2 oder 4 dieser beschränkten Teilfolgen.<sup>5</sup> f0, f3 und f6 haben nur eine beschränkte Teilfolge (sie haben keine beschränkte Periode). Die restlichen Folgen (f1, f11, f2, und f4) enthalten 2 beschränkte Teilfolgen. Wenn eine Folge keine beschränkte Periode hat, ist sie äquivalent zu sich selbst, wenn sie mit 5 mutlipliziert wird. Dies zeigt die spezielle

Bedeutung der Zahl 5 für die Mod 12-Sammlung: 5 ist die kleinste relativprime Zahl zu 12 (außer 1), und es lässt sich sehen, dass 5 der Multiplikator der Fibonacci-Mod 12-Folgen ist.

## 2.2 Invertierbarkeit

Alle Fibonacci-Sequenzen  $f_n \pmod{m}$  können in eine Sequenz  $m - (f_n \pmod{m})$  invertiert werden, die auch die Fibonacci-Eigenschaft hat.<sup>6</sup> Das invertierte Gegenstück einer Folge  $f_n$  wird  $f_n'$  bezeichnet, wenn Unterscheidung nötig ist.  $f_1$  und  $l_1$  haben die Periode 24, können aber in eine einzigartige Fibonacci-Sequenz invertiert werden; somit haben  $f_1$  und  $l_1$  beide 48 Restklassen.  $f_2$  hat auch die Periode 24, aber enthält ihre Inversion in der Mitte der Sequenz; folglich hat  $f_2$  24 Restklassen.  $f_3$  hat die Periode 6 und kann in eine einzigartige Sequenz invertiert werden; in der Folge hat  $f_3$  insgesamt 12 Restklassen.  $f_4$  enthält ihre eigene Inversion, und hat 8 Restklassen.  $f_6$  ist gleich ihrer Inversion und hat 3 Restklassen.  $f_0$  hat nur eine Restklasse und ist gleich sich selbst, wenn sie invertiert wird. Tabelle 2 zeigt die gesamten Vorkommen von jeder Restklasse in den Fibonacci-Folgen.

## 2.3 Primfolgen und Teilfolgen

Die Abwesenheit bestimmter Restklassen in  $f_1$  und  $f_5$  ist das direkte Ergebnis des verwendeten Modulus. Modulus 12 ist ein defektiver Modulus, denn die Fibonacci-Sequenz enthält kein vollständiges Restesystem modulo 12.<sup>7,8</sup> Restklasse 6 fehlt in  $f_1$ . Dies resultiert daraus und könnte als Beweis dafür betrachtet werden, dass jede Fibonacci-Zahl, die durch 6 dividiert werden kann, auch durch 12 teilbar ist. Restklassen 0 und 9 fehlen in  $l_1$ . Dies beweist, dass keine Lucas-Zahl durch 12 teilbar ist und dass keine Lucas-Zahl durch 12 mit einem Rest von 9 teilbar ist. Weil Restklasse 0 in  $l_1$  fehlt, ist sie die einzige Folge, in der es keine sich wiederholenden Töne oder Intervalle gibt.

In  $f_1$  und  $l_1$  sind alle aufeinander folgenden Zahlen relativprim zu dem Modulus  $(f_n, f_{n+1}, m) = 1$ . Wir weisen auf  $f_1$  und  $l_1$  als Primfolgen hin. Diese Primfolgen resultieren in denselben Teilfolgen, wenn sie mit der gleichen Zahl multipliziert werden. Zuvor haben wir  $f_2$  von  $(f_1 * 2)$  hergeleitet, aber  $f_2$  kann auch von  $(l_1 * 2)$  hergeleitet werden. Die Abwesenheit bestimmter Restklassen in den Folgen  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  und  $f_6$  ergibt sich aber aus einem anderen Grund als die Abwesenheiten in den Folgen  $f_1$  und  $l_1$ . Die Abwesenheiten bestimmter Restklassen in diesen Folgen resultieren daraus, dass keine aufeinander

folgenden Zahlen zu dem Modulus relativprim sind:  $(f_0, f_1, m) = k$  wenn  $k \geq 2$ . Alle geordneten Zweiklänge sind mit dem Modulus 12 reduzierbar; wir nennen solche Folgen Teilfolgen. Dies erklärt, warum die Periode und andere Eigenschaften der Teilfolgen sich von denen der Folgen  $f_1$  und  $l_1$  unterscheiden. Z.B. wenn wir  $f_2$  analysieren, in der  $f_0 = 0$  und  $f_1 = 2$  mit einem Modulus 12 sind, analysieren wir eigentlich eine kongruente Sequenz, in der  $f_0 = 0$  und  $f_1 = 1$  mit dem Modulus 6 sind. Es lohnt sich, die Teilfolgen in ihren Primformen anzusehen; alle Teilfolgen der Mod 12-Sammlung werden in Tabelle 3 in ihrer Primform gezeigt.

Die nächstgrößte gleichschwebende Teilfolge der Zwölftonskala ist die Sechstonskala. Verwendeten wir nur 6 Töne in der Oktave, hieße  $f_2$  eigentlich  $f_1 \pmod{6}$ , eine Primfolge in dem Mod 6-Universum. Mit dem Modulus 6 sind die Fibonacci-Sequenz und Lucas-Folge ein Teil derselben Sequenz; die Lucas-Folge fängt in der Mitte der beschränkten Periode von  $f_1$  an. Alle Restklassen kommen vor; Modulus 6 ist kein defektiver Modulus. Mit 6 gleichschwebenden Intervallen in der Oktave wäre es auch möglich die Folgen  $f_4$  sowie  $f_0$  und  $f_6$  zu schaffen. Zusammen mit  $f_2$  enthalten diese Folgen alle  $6^2 = 36$  möglichen Zweiklänge der Sechstonstimmung. Das Diagramm in Tabelle 3 zeigt die Beziehung zwischen Oberfolgen und Teilfolgen in der Mod 12-Sammlung. Die Mod 6-Sammlung ist sich von  $f_1$  ausbreitend zu sehen.  $f_4$  sollte sowohl als  $f_1 \pmod{3}$  als auch als  $f_2 \pmod{6}$ , eine Teilfolge in der Mod 6-Sammlung, betrachtet werden.  $f_3$  ist keine Teilfolge von  $f_2$ , weil es unmöglich wäre,  $f_3$  mit einer Sechstonstimmung zu schaffen.

Eine andere gleichschwebende Teilfolge der Zwölftonskala ist die Viertonskala; sie enthält  $4^2 = 16$  mögliche Zweiklänge. Tabelle 3 zeigt, wie die Lucas-Folge und Fibonacci-Sequenz mit Modulus 4 einzigartig bleiben, obwohl sie mit den Moduli 6, 3, 2 und 1 dieselbe Sequenz mit verschiedenen Anfangspunkten sind.  $f_6$  ist kongruent zu einer Fibonacci-Sequenz, in der  $f_0 = 0$  und  $f_1 = 1$  mit einem Modulus  $m = 2$  sind.  $f_6$  und  $f_0$  sind die einzigen Folgen, deren Periode eine ungerade Zahl ist. Wenn  $m > 2$  ist, haben alle Fibonacci-Sequenzen  $(\pmod{m})$  eine gerade Periode.<sup>9</sup> Alle Moduli, die Divisoren von 12 sind (Moduli 6, 4, 3, 2, und 1), sind nicht defektiv. Obwohl alle Multiplikationen eines defektiven Modulus defektive Moduli sind, folgt das nicht, dass ein Divisor desselben defektiven Modulus defektiv ist.<sup>10</sup>

## 2.4 Semisymmetrie

Tabelle 4 zeigt die Semisymmetrie in den Tonklassenzyklen f1 und l1. Jeder Meridian verbindet identische Tonklassen auf gegenüberliegenden Seiten der Folgen. Die semisymmetrische Natur der Fibonacci-Sequenzen wird am besten verstanden, wenn die Sequenz sich in die negativen Fibonacci-Zahlen  $f_{-n}$  erstreckt. Hervorzuheben ist die Abwechslung in der Sequenz von negativen und positiven Zahlen:

... 34 -21 13 -8 5 -3 2 -1 1 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 ...

Die 0 dient als Angelpunkt, so dass jede zweite Restklasse ihrem gegenüberliegenden Gegenstück entspricht. Die Restklassen dazwischen sind die Inversionen ihrer Gegenstücke. Wenn  $f_{2n}$  eine gerade Position in der Fibonacci-Sequenz  $f_n \pmod{m}$ , in der  $f_0 = 0$  ist, bezeichnet, dann sind  $f_{2n} \equiv m - f_{-2n} \pmod{m}$  und  $f_{2n-1} \equiv f_{-2n+1} \pmod{m}$ . Die Lucas-Folge hat eine ähnliche Eigenschaft:

... -76 47 -29 18 -11 7 -4 3 -1 2 1 3 4 7 11 18 29 47 76 ...

In der Lucas-Folge dient 2 als Angelpunkt statt 0, und die Eigenschaft der Fibonacci-Sequenz ist umgekehrt, so dass, wenn  $l_0 = 2$  und  $l_1 = 1$  sind, daraus folgt, dass  $l_{2n} \equiv l_{-2n} \pmod{m}$  und  $l_{2n-1} \equiv m - l_{-2n+1} \pmod{m}$  sind.

## 2.5 Intervallzyklen

Die Intervallzyklen sind ein Mitglied der Tonklassenzyklenfamilie; sie eignen sich, wegen ihrer arithmetischen und gleichschwebenden Natur, gut als Werkzeuge für die Analyse von Fibonacci-Tonklassenfolgen. Die Intervallzyklen werden in Tabelle 5 gezeigt.<sup>11</sup> Der Intervallklassenzyklus oder Zyklen, zu dem bzw. zu denen eine Fibonacci-Tonfolge gehört, kann, wegen der definierenden Beziehung der Sequenz, von irgendeinem geordneten Zweiklang in einer Tonfolge bestimmt werden. Die Elemente von f1 und l1 gehören zu C1 und C5; wir haben individuelle Abwesenheiten zur Kenntnis genommen. Die Elemente von f2 gehören zu C2<sub>0</sub>. Die Elemente der Folge f3 werden in C3<sub>0</sub> gefunden, und die Elemente von f4 in C4<sub>0</sub>. Die Elemente von f6 gehören zu C6<sub>0</sub>. Diese Trennung der Sonoritäten ist von großer hörbarer Bedeutung. Auch zu bemerken ist, dass jeder dritte Ton von f1 und l1 zu C2<sub>0</sub> gehört, die Töne dazwischen zu C2<sub>1</sub>.<sup>12</sup>

f1 0 1 1 2 3 5 8 1 9 10 7 5 0 5 5 10 3 1 4 5 9 2 11 1

l1 6 1 7 8 3 11 2 1 3 4 7 11 6 5 11 4 3 7 10 5 3 8 11 7

Dem wachsamem Leser wird auffallen, dass dieses Muster, dass die Elemente zu  $\dots, C2_0, C2_1, C2_1, C2_0, C2_1, C2_1, \dots$ , oder noch allgemeiner zu  $\{\dots, x, z, z, x, z, z, \dots\}$  gehören, ein bekanntes Fibonacci-Muster ist. Es lässt sich sehen, dass eine Beschränkung der Fibonacci-Folgen f1 und l1 mit verallgemeinerten Intervallklassenzyklen erfolgen kann:  $C2_0 + C2_1 = C2_1$  und  $C2_1 + C2_1 = C2_0$ . Die Subskripte der Zyklen gestalten eine Fibonacci-Sequenz (mod 2), nämlich  $\{\dots, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \dots\}$ . Wenn eine Folge mit  $C2_0 + C2_0 = C2_0$  anfängt, besteht die ganze Sequenz aus Elementen des Zyklus  $C2_0$  (wie z.B. in f0, f2, f4, und f6). Auch zu bemerken ist, dass jedes vierte Glied von f1 und l1 ein Glied von  $C3_0$  ist (d.h. durch 3 teilbar ist); alle Tonklassen dazwischen gehören der oktatonischen Folge  $C3_{1,2}$  an. Wir könnten eine mathematische Regel einführen, nämlich dass, wenn  $f_0 \in Cn_x$  und  $f_1 \in Cn_z$ , wir eine Fibonacci-Sequenz (mod)  $n$  verwenden und mit den Zahlen  $x + z$  anfangen, um eine verallgemeinerte Fibonacci-Sequenz zu schaffen. Tabelle 6 zeigt alle möglichen verallgemeinerten Fibonacci-Intervallzyklensequenzen.

## 2.6 Gleichbleibende Drei- und Vierklänge

Jeder geordnete Zweiklang ist in einem gleichbleibenden Dreiklang enthalten. Das Wort gleichbleibend wird hier in Bezug auf den Inhalt eines Drei- oder Vierklanges verwendet; die Reihenfolge der Töne wird außer Acht gelassen. Wir wissen von der definierenden Beziehung und dem Kommutativgesetz der Addition, dass jedes Mal, wenn ein geordneter Zweiklang vorkommt, der nach diesem Zweiklang folgende Ton gleich wäre, selbst wenn die Reihenfolge der Töne des vorherigen geordneten Zweiklangs umgekehrt wäre. Es ist die Reihenfolge, die bestimmt, was diesem Dreiklang folgt. Dreiklänge, die mit einem Identitäts-Zweiklang (d.h. mit einem Zweiklang, dessen zwei Restklassen identisch sind) anfangen, z.B.  $\{x, x, y\}$ , haben gar kein gleichbleibendes Gegenstück, mit einer Ausnahme, denn der Dreiklang  $\{6, 6, 0\}$  gestaltet eine Durchschnittsfolge mit seinen zwei gleichbleibenden Gegenstücken und hat drei mögliche Reihenfolgen. Daher gibt es 11 Dreiklänge, die kein gleichbleibendes Gegenstück haben. Es gibt noch 11 Dreiklänge, die mit ihrem gleichbleibenden Gegenstück eine Durchschnittsfolge gestalten; alle kommen in der Form:  $\{x, 0, x\}$  und  $\{0, x, x\}$  vor, wenn  $1 \leq x \leq 11$ . Es gibt



55 übrige Paare von Dreiklängen, die einander nicht schneiden:  $\{x, y, z\}$  und  $\{y, x, z\}$ . Tabelle 7 zeigt Beziehungen zwischen allen gleichbleibenden Dreiklängen in den Primfolgen. Der Anfangspunkt jedes geordneten Zweiklanges wird hier von einem Punkt über dem ersten Element bezeichnet. Eine Linie oder ein Bogen verbindet einen Dreiklang mit seinem gleichbleibenden Gegenstück, falls sich die Dreiklänge in der gleichen Sequenz befinden.

Gleichbleibende Vierklänge werden auch in der Sammlung gefunden. Tabelle 8 zeigt alle gleichbleibenden Vierklänge in den Primfolgen. Jeder Vierklang, dessen zweites Element 4 oder 8 ist, hat zur Folge 2 gleichbleibende Vierklänge. Es lässt sich sehen, dass jeder Fall, in dem ein Vierklang an drei verschiedenen Stellen vorkommt, eine Teilfolge von  $C4_x$  involviert, und dass das zweite Element dieses Vierklanges immer 4 oder 8 ist. Das zweite Element eines jeglichen Fibonacci-Vierklanges ist in jeder Addition involviert, die den Vierklang komplettiert. Die Tonklassen in  $C4_x$  sind, wegen der Natur der Folge, getrennt durch Viererintervalle; die Hinzufügung eines zweiten Elements 4 (oder 8) zu irgendeinem Element resultiert in einer anderen Tonklasse in  $C4_x$ . Die Hinzufügung noch eines dritten Elements 4 (oder 8) zu diesem Dreiklang schließt das dritte Element der Folge  $C4_x$  ab. Die 4 oder 8 sind wie eine additive Identität für  $C4_x$ . Jeder Vierklang, der mit 6 oder 1 anfängt, hat ein gleichbleibendes Gegenstück (siehe z.B. die Vierklänge  $\{6, 1, 7, 8\}$  und  $\{6, 7, 1, 8\}$ , oder  $\{6, 2, 8, 10\}$  und  $\{6, 8, 2, 10\}$  in f2). Es gibt keine Fälle gleichbleibender Folgen größer als Vierklänge.

Es gibt noch ein Phänomen, das hier erwähnt werden soll. Denn aus  $f_{n+2} - f_{n+1} = f_n$ , folgt, dass jedes Element, das einem geordneten Zweiklang vorangeht, dasselbe wäre, selbst wenn der Zweiklang in umgekehrter Reihenfolge wäre (z.B. haben wir  $\{1, 1, 2, 3\}$  und  $\{11, 2, 1, 3\}$ , oder  $\{9, 4, 1, 5\}$  und  $\{3, 1, 4, 5\}$ ). Obwohl sie nicht gleichbleibend im traditionellen Sinn sind, sollten sie trotzdem im weitesten Sinn als gleichbleibend betrachtet werden.

### 3.0 Invers-Fibonacci-Tonklassenfolgen

Neue lineare Möglichkeiten ergeben sich aus Invers-Fibonacci-Tonfolgen. In der Invers-Fibonacci-Sequenz gilt  $f_n - f_{n+1} = f_{n+2}$  für  $\dots, f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots$ . Jedes aufeinander folgende Glied ist gleich der Summe der zwei vorherigen Glieder. Die Invers-Fibonacci-Sequenz fängt so an:  $\{0, 1, -1, 2, -3, 5, -8,$

13, -21, ...}. Invers-Fibonacci-Tonfolgen sind gleich den rückschreitenden Fibonacci-Sequenzen (mod 12), und werden mit  $-fn$  bezeichnet:

-f1 0 1 11 2 9 5 4 1 3 10 5 5 0 5 7 10 9 1 8 5 3 2 1 1

Zu bemerken ist, dass alle ungeraden Glieder der Sequenz  $f_{2n-1}$  unverändert bleiben, wenn die Sequenz rückschrittlich ist; die geraden Glieder zwischen  $f_{2n}$  sind die Inversion der originalen Sequenz  $f1$ . Tabelle 9 zeigt alle Invers-Fibonacci-Tonklassenfolgen. Invers-Tonfolgen sind identisch mit den originalen Zyklen, aber entgegen dem Uhrzeigersinn gelesen.

#### 4.0 Fibonacci-Harmonie

Nach der Erwägung der Fibonacci-Sequenz von einem hauptsächlich linearen (melodischen) Standpunkt aus konzentrieren wir uns jetzt auf die harmonischen Eigenschaften der Sequenz. Für alle Sequenzen  $f_x$  und  $f_y$  gibt es eine Sequenz  $h_z$ , die auch die Fibonacci-Eigenschaft hat.<sup>13</sup> Folgendes ist ein Beispiel aus der Mod 12-Sammlung:

f1	1	1	2	3	5	8	1	9	10	7	5	0	5	5	10	3	1	4	5	9	2	11	1	0	
	-																								
f2	0	2	2	4	6	10	4	2	6	8	2	10	0	10	10	8	6	2	8	10	6	4	10	2	
	=																								
hf1'	1	11	0	11	11	10	9	7	4	11	3	2	5	7	0	7	7	2	9	11	8	7	3	10	

Wenn wir zwei Folgen in Eins-zu-eins-Korrespondenz abziehen (z.B.  $\{f1: 1, 1, \dots\} - \{f2: 0, 2, \dots\} = \{hf1': 1, 11, \dots\}$ ), ist  $hfn$  eine harmonisch ausgedrückte Fibonacci-Intervallklassenfolge. Da es 144 mögliche geordnete Zweiklänge gibt, folgt, dass es 144 mögliche harmonische Kombinationen mit jedem Zweiklang gibt. Siehe z.B. der erste oben gezeigte Zweiklang in  $f1$   $\{f1: 1, 1, \dots\}$ , dieser Zweiklang kann mit allen 144 möglichen Zweiklängen  $\{fn: x, y, \dots\}$  gepaart werden, um eine einzigartige Sequenz  $\{hfz: v, w, \dots\}$  zu schaffen. Wenn  $x = 1$  und  $y = 1$ , ist die daraus resultierende Sequenz  $\{f1: 1, 1, \dots\} - \{f0: 0, 0, \dots\} = \{hf1: 1, 1, \dots\}$ . Wenn  $x = 0$  und  $y = 0$ , ist die daraus resultierende harmonische Sequenz immer gleich der originalen Sequenz  $\{f1: 1, 1, \dots\} - \{f0: 0, 0, \dots\} = \{hf1: 1, 1, \dots\}$ . Das Faktum, dass es 144 mögliche harmonische Kombinationen einer Folge gibt, impliziert, dass eine Folge auf 144 verschiedenen Weisen

ausgedrückt werden kann. Nehmen wir ein Beispiel: Das oben angeführte Beispiel war  $\{f_1: 1, 11, \dots\}$ . Unter den 143 anderen Möglichkeiten hätten wir dieselbe harmonische Folge mit  $\{f_2: 2, 2, \dots\} - \{11: 1, 3, \dots\} = \{f_1: 1, 11, \dots\}$  bilden können. Ebenfalls klar ist, dass ohne Rücksicht darauf, wie viele Fibonacci-Folgen verwendet werden, die Beziehung zwischen den Folgen immer eine Fibonacci-Beziehung ist. Diese Eigenschaften gelten auch für Invers-Fibonacci-Folgen, obwohl keine Fibonacci-Harmonie aus dem Paaren einer Folge  $f_n$  mit einer Invers-Folge  $-f_k$  resultiert.

## 5.0 Nonmodulare Fibonacci-Tonfolgen

Nonmodulare Fibonacci-Tonfolgen wurden schon von etlichen Komponisten und Theoretikern erforscht.<sup>14</sup> Sie sind, wegen ihrer einzigartigen Sonorität und goldenen Verhältnisse, von besonderem Interesse. Diese Folgen können von den ersten zwei Zahlen  $n$  und  $m$  der Sequenz klassifiziert werden, denn sie bestimmen die ganze Sequenz. Es ist praktisch, das Symbol  $F_{n,m,t}$  zu verwenden, um auf nonmodulare Fibonacci-Tonfolgen hinzuweisen, wenn  $t$  die Kardinalzahl der Folge ist. Invertierte Folgen werden mit  $F_{-n,-m,t}$  bezeichnet, so dass die Folge  $F_{-1,-2,8} = \{-1, -2, -3, -5, -8, -13, -21, -34\}$  ist. In Normalform sind  $n$  und  $m$  kleiner als 12. Natürlich ist auch möglich, dass die Folge sich in die negativen Zahlen der Sequenz  $f_{-n}$  erstreckt, wie z.B. in  $F_{-21,13,15} = \{-21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8\}$ . Wenn Folgen auch mehrere negative Fibonacci-Zahlen enthalten, gestaltet die Folge einen Fibonacci-Keil. Tabelle 10 zeigt die Normalformen für die Folge  $f_1$ . Diese Tabelle wurde von Schnittfolgen von Intervall und Tonklassen in der Folge organisiert, die von den original konstruierten Tonklassenfolgen leicht hergeleitet werden können. Diese Folgen können nur so groß sein, weil sie sich - mit größeren Kardinalzahlen - rasch unserer Hörgrenze annähern.  $F_{0,0,t}$  ist die Ausnahme, und kann eine unendliche Kardinalzahl haben. Eine Grenze von 112 wurde auf beiden Seiten der Sequenzen  $f_n$  und  $f_{-n}$  gezogen; diese Anzahl von Halbtönen scheint gut geeignet, da sie sich von 30 – 16.000 hz erstreckt.

## 5.1 Invers-Fibonacci-Tonfolgen

Ebenso ist die Konstruktion von Invers-Fibonacci-Tonfolgen ist möglich. An dieser Stelle ist es hilfreich eine andere Darstellung der Invers-Fibonacci-Tonklassenfolgen einzuführen, in der jede Restklasse einen Absolutbetrag kleiner als 12 haben muss:

-f1 0 1 -1 2 -3 5 -8 1 -9 10 -7 5 0 5 -5 10 -3 1 -4 5 -9 2 -11 1

Der Tonklasseninhalt dieser Sequenz ist selbstverständlich identisch mit dem der originalen Sequenz.

In der Konstruktion der Invers-Fibonacci-Folgen ist es praktisch, diese Gestaltung der Sequenzen zu verwenden. Invers-Tonfolgen werden von den ersten zwei Zahlen  $n$  und  $m$  klassifiziert:  $-F_{n,m}$ .  $n$  und  $m$  können negativ oder positiv sein und müssen einen Absolutbetrag kleiner als 12 haben, so dass  $-F_{8,-7} = \{8, -7, 15, -22, 37, -59\}$  ist. Diese Folgen können sich auch in die negativen Fibonacci-Zahlen erstrecken, wie z.B.  $-F_{5,3} = \{5, 3, 2, 1, 1, 0, 1, -1, 2, -3\}$ . Tabelle 11 zeigt Invers-Fibonacci-Tonfolgen von -11 in Normalform mit derselben Grenze von 112 Halbtönen. Der Invers-Fibonacci-Keil dehnt sich aus. Die Folgen konvergieren auf beiden Seiten des Angelpunkts 0 zu  $(1 - 0,61803\dots)$ . Das beste Beispiel dafür ist die Folge  $-F_{0,11} = \{0, 1, -1, 2, -3, 5, -8, 13, -21, 34, -55\}$ ; die letzten zwei negativen Elemente der Folge sind  $-21/-55 = 1 - 0,618$ , die letzten positiven  $13/34 = 1 - 0,617647\dots$

## 6.0 Über Fibonacci modulo 12 hinaus

In diesem Aufsatz versuchte ich, mit der Verwendung der gleichschwebenden Zwölfstimmung eine gründliche Anwendung der Fibonacci-Zahlen auf Tonstruktur zu schaffen. Er lässt jedoch vieles offen, was bezüglich der Anwendung von Fibonacci-Sequenzen auf Tonstruktur noch erforscht werden muss. In meinem nächsten Aufsatz untersuche ich Fibonacci-Sequenzen mit der Verwendung anderer Stimmungen sowie eine andere rekursive Sequenz von größerer Komplexität: die Tribonacci-Sequenz, die mit  $\{0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, \dots\}$  beginnt.

## Anmerkungen

Ich möchte Alan Fletcher für seine wertvollen Vorschläge während des Verfassens dieses Aufsatzes danken.

Ich danke auch Thomas Pimingsdorfer für seine Hilfe bei der deutschen Version.

- 1 Diese Sequenz wurde nach dem französischen Mathematiker Edouard Lucas (1842 – 1891) benannt, der der Fibonacci-Sequenz ihren Namen gegeben hat und der auch vorgeschlagen hat, die Lucas-Folge  $\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots\}$  als Fibonacci-Sequenz zu bezeichnen. Diese Sequenz hat viele interessante Beziehungen zu der Fibonacci-Sequenz und auch etliche einzigartige Eigenschaften, die nicht in der Fibonacci-Sequenz gefunden werden. Eine Eigenschaft, die hier erwähnt werden soll, ist, dass  $f_{n-1} + f_{n+1} = l_n$  für alle  $n$ , wenn  $f_n =$  die  $n$ -te Fibonacci-Zahl, und  $l_n =$  die  $n$ -te Lucas Zahl ist. Dies ist die Beziehung, mit der ich zuvor 11 von f1 hergeleitet habe. Für eine vorzügliche Einleitung in die Fibonacci-Zahlen und den goldenen Schnitt ist Hoggatt 1969 sehr zu empfehlen.
- 2 Die Evangelisten-Sequenz wurde wegen des Vorkommens der Zahlen 2, 5, 7 und 12 bei Matthäus 14, 17-20, Johannes 6, 9-13, und Matthäus 15, 34-37 so benannt. Eine von den vielen interessanten Beziehungen dieser Sequenz zur Fibonacci-Sequenz ist  $e_n = f_{n+3} - f_{n-2}$  für alle  $n$ , wenn  $e_n =$  die  $n$ -te Zahl der Evangelisten-Sequenz und  $f_n =$  die  $n$ -te Fibonacci-Zahl ist.
- 3 Eine Restklasse ist die Kongruenzklasse aller ganzen Zahlen, die denselben Divisionsrest haben, wenn sie durch den Modulus  $m$  dividiert werden. Kongruenz ist eine Äquivalenz-Beziehung. Wenn  $a \equiv b \pmod{m}$ , dann gehören  $a$  und  $b$  zu derselben Restklasse von  $m$ . Z.B. -10, 2 und 14 gehören alle zu derselben Restklasse modulo 12.
- 4 Forte 1973: 3.
- 5 Siehe Mandelson 1968: 276. Mandelson weist auf diese Teilfolgen als Gruppen hin, obwohl sie nicht Gruppe im strengen mathematischen Sinn sind. Hier wird das Wort beschränkte Periode verwendet, um Verwechslungen zu vermeiden.
- 6 BEWEIS. Nehmen wir eine Fibonacci-Sequenz  $F_n \pmod{m}$ , die mit  $f_0, f_1, f_0 + f_1 \pmod{m}, \dots$  beginnt. Es gibt eine Sequenz  $m - [F_n \pmod{m}]; m - f_0, m - f_1, m - (f_0 + f_1) \pmod{m}, \dots$ . Und es lässt sich sehen,

dass die ersten zwei Glieder der Sequenz  $(m - f_0) + (m - f_1) = 2m - (f_0 + f_1) \equiv m - (f_0 + f_1) \pmod{m}$  sind.

Daher ist die Sequenz  $m - [F_n \pmod{m}]$  eine Fibonacci-Sequenz.

- 7 Für eine weitere Diskussion der defektiven Moduli und der vollständigen Restesysteme siehe Shaw 1968, Bruckner 1970, und Burr 1971.
- 8 Ein vollständiges Restesystem modulo  $m$  ist eine Folge, die alle möglichen Restklassen modulo  $m$  enthält. Z.B.  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  oder  $\{-5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$ .
- 9 Wall 1960, 4. Satz.
- 10 Shah 1968, 2. Satz.
- 11 George Perle führte die Abkürzung  $Cn_x$  ein.  $n$  ist das Intervall und  $x$  bezeichnet die kleinste Tonzahl des Zyklus, siehe Perle 1985: 198-200.
- 12 Diese Eigenschaft lässt sich in der Fibonacci-Sequenz klar sehen, denn jede dritte Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von 2, jede vierte ein Vielfaches von 3, jede fünfte ein Vielfaches von 5, jede sechste ein Vielfaches von 8 usw. Die Lucas-Folge hat ähnliche Eigenschaften; jede dritte Lucas-Zahl ist ein Vielfaches von 2, jede vierte ein Vielfaches von 3, aber die Lucas-Folge ist in dieser Hinsicht komplizierter als die Fibonacci-Sequenz; der Leser wird angeregt dies zu erforschen, oder siehe Hoggatt 1969.
- 13 BEWEIS. Wir nehmen zwei Fibonacci-Sequenzen mit folgenden definierenden Beziehungen:  $f_x + f_{x+1} = f_{x+2}$ , und  $l_y + l_{y+1} = l_{y+2}$ . Jetzt leiten wir eine dritte Sequenz  $U_z$  von  $u_z = f_x - l_y$ ,  $u_{z+1} = f_{x+1} - l_{y+1}$  und  $u_{z+2} = f_{x+2} - l_{y+2}$  ab. Nun muss bewiesen werden, dass  $u_z + u_{z+1} = u_{z+2}$ , und es ist klar, dass  $(f_x - l_y) + (f_{x+1} - l_{y+1}) = (f_x + f_{x+1}) - (l_y + l_{y+1}) = (f_{x+2} - l_{y+2})$ . Deswegen hat  $U_z$  die Fibonacci-Eigenschaft.
- 14 Kramer 1973: 134-141.

#### Zitierte Werke

- Bruckner, G. 1970. Fibonacci Sequence Modulo A Prime  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . *Fibonacci Quarterly* 8:217-220.
- Burr, S. A. 1971. On Moduli for which the Fibonacci Sequence Contains a Complete System of Residues. *Fibonacci Quarterly* 9:497-504.

- Forte, Allen. 1973. *The Structure of Atonal Music*. New Haven: Yale University Press.
- Hoggatt, Verner E. Jr. 1969. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston: Houghton Mifflin.
- Kramer, Jonathan. 1973. The Fibonacci Series in Twentieth-Century Music. *Journal of Music Theory* 17/1:110-150.
- Lendvai, Ernő. 1962. Duality and Synthesis in the Music of Béla Bartók. *New Hungarian Quarterly* III/vii. Reprinted in György Kepes ed., *Module, Proportion, Symmetry, Rhythm*:174-193 (New York: George Braziller, 1966).
- Robinson, D. W. 1963. Amateur Interests in the Fibonacci Series III: Residues of  $U_n$  with Respect to Any Modulus. *Fibonacci Quarterly* 1:275-278.
- Perle, George. 1985. *The Operas of Alban Berg, Volume Two: Lulu*. Berkeley and Los Angeles: University of California Press.
- Shah, A. P. 1968. Fibonacci Sequence Modulo  $m$ . *Fibonacci Quarterly* 6:139-141.
- Wilcox, Howard. 1992. Generating Fibonacci Sequences of Pitch Classes. *Sonus: A journal of investigations into global musical possibilities* XII/2:44-47.
- Wall, D. D. 1960. Fibonacci Series Modulo  $m$ . *American Mathematical Monthly* 67:525-532.

Table 1  
Fibonacci Pitch Class Sets

---

f0 0

f1  
0 1 1 2 3 5 8 1 9 10 7 5 0 5 5 10 3 1 4 5 9 2 11 1  
0 11 11 10 9 7 4 11 3 2 5 7 0 7 7 2 9 11 8 7 3 10 1 11

l1  
2 1 3 4 7 11 6 5 11 4 3 7 10 5 3 8 11 7 6 1 7 8 3 11  
10 11 9 8 5 1 6 7 1 8 9 5 2 7 9 4 1 5 6 11 5 4 9 1

f2 0 2 2 4 6 10 4 2 6 8 2 10 0 10 10 8 6 2 8 10 6 4 10 2

f3  
0 3 3 6 9 3  
0 9 9 6 3 9

f4 0 4 4 8 0 8 8 4

f6 0 6 6

---

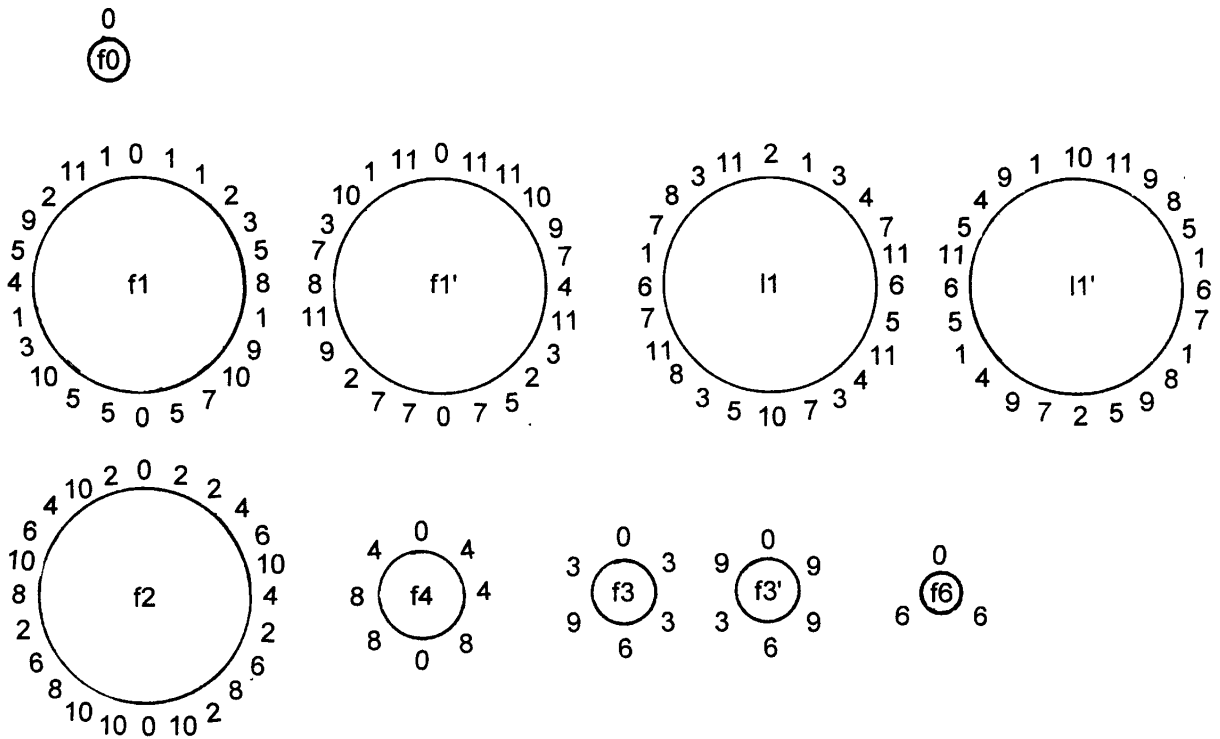




Table 2  
Total Occurrences of Each Residue  $r$  in  $fn$

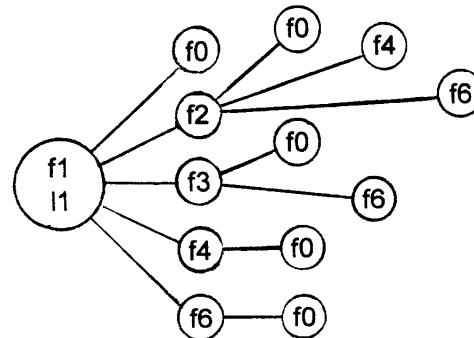
$r$ - # of occurrences					
f0	0 - 1	f1	0 - 2	f1'	0 - 2
	1 - 0		1 - 5		1 - 1
	2 - 0		2 - 2		2 - 2
	3 - 0		3 - 2		3 - 2
	4 - 0		4 - 1		4 - 1
	5 - 0		5 - 5		5 - 1
	6 - 0		6 - 0		6 - 0
	7 - 0		7 - 1		7 - 5
	8 - 0		8 - 1		8 - 1
	9 - 0		9 - 2		9 - 2
	10 - 0		10 - 2		10 - 2
	11 - 0		11 - 1		11 - 5
				l1	0 - 0
					1 - 2
					2 - 1
					3 - 4
					4 - 2
					5 - 2
					6 - 2
					7 - 4
					8 - 2
					9 - 0
					10 - 1
					11 - 4
				l1'	0 - 0
					1 - 4
					2 - 1
					3 - 0
					4 - 2
					5 - 4
					6 - 2
					7 - 2
					8 - 2
					9 - 4
					10 - 1
					11 - 2
f2	0 - 2	f3	0 - 1	f3'	0 - 1
	1 - 0		1 - 0		1 - 0
	2 - 6		2 - 0		2 - 0
	3 - 0		3 - 3		3 - 1
	4 - 3		4 - 0		4 - 0
	5 - 0		5 - 0		5 - 0
	6 - 4		6 - 1		6 - 1
	7 - 0		7 - 0		7 - 0
	8 - 3		8 - 0		8 - 0
	9 - 0		9 - 1		9 - 3
	10 - 6		10 - 0		10 - 0
	11 - 0		11 - 0		11 - 0
				f4	0 - 2
					1 - 0
					2 - 0
					3 - 0
					4 - 3
					5 - 0
					6 - 0
					7 - 0
					8 - 3
					9 - 0
					10 - 0
					11 - 0
				f6	0 - 1
					1 - 0
					2 - 0
					3 - 0
					4 - 0
					5 - 0
					6 - 2
					7 - 0
					8 - 0
					9 - 0
					10 - 0
					11 - 0

to accompany pg. 5

Table 3  
Prime Forms of Mod 12 Subsets

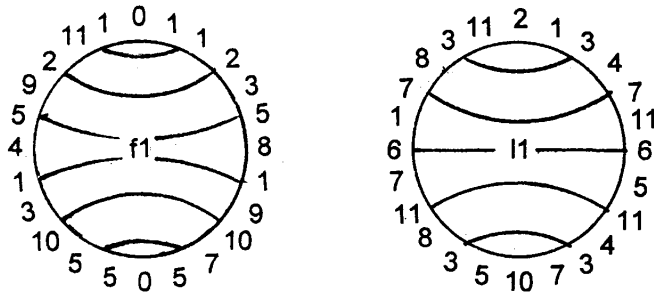
f1 (mod 6)	0	1	1	2	3	5	2	1	3	4	1	5	0	5	5	4	3	1	4	5	3	2	5	1
	0	1	1	2	3	1																		
f1 (mod 4)	0	3	3	2	1	3																		
f1 (mod 3)	0	1	1	2	0	2	2	1																
f1 (mod 2)	0	1	1																					

Mod 12 Subsets and Supersets



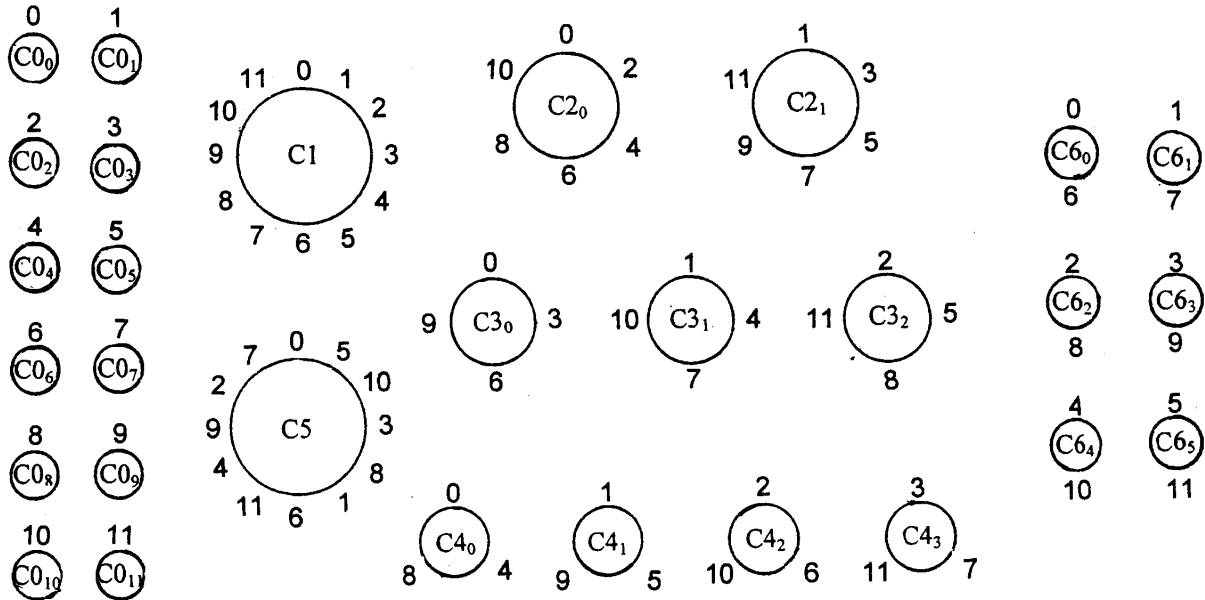
to accompany pg. 6

Table 4  
Semi-Symmetry in Pitch Class Cycles



to accompany pg. 6

Table 5  
The Interval Cycles



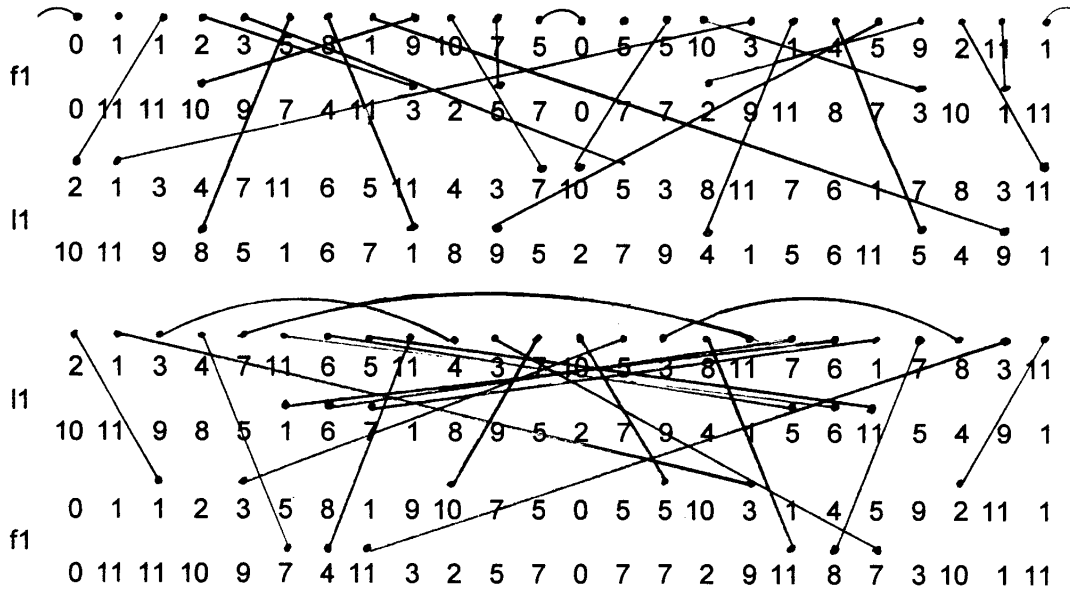
to accompany pg. 7

Table 6  
Generalized Fibonacci Interval Cycle Sequences

C2 <sub>0</sub>	C4 <sub>0</sub>
C2 <sub>0</sub> C2 <sub>1</sub> C2 <sub>1</sub>	C4 <sub>0</sub> C4 <sub>1</sub> C4 <sub>1</sub> C4 <sub>2</sub> C4 <sub>3</sub> C4 <sub>1</sub>
	C4 <sub>0</sub> C4 <sub>3</sub> C4 <sub>3</sub> C4 <sub>2</sub> C4 <sub>1</sub> C4 <sub>3</sub>
C3 <sub>0</sub>	C4 <sub>0</sub> C4 <sub>2</sub> C4 <sub>2</sub>
C3 <sub>0</sub> C3 <sub>1</sub> C3 <sub>1</sub> C3 <sub>2</sub> C3 <sub>0</sub> C3 <sub>2</sub> C3 <sub>2</sub> C3 <sub>1</sub>	

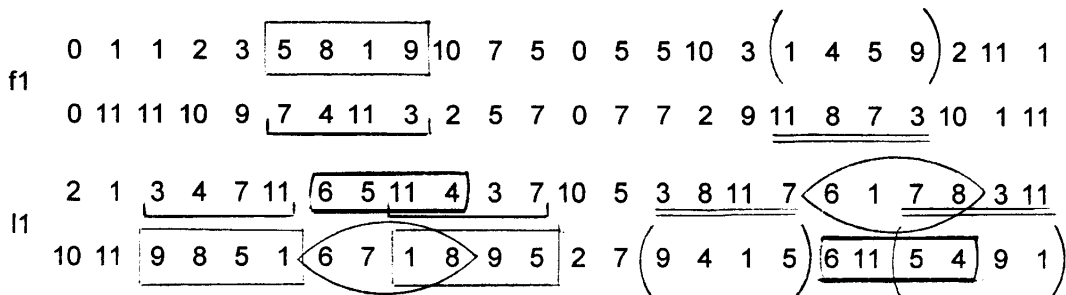
to accompany pg. 8

Table 7  
Invariant Trichords in the Prime Sets



to accompany pg. 8

Table 8  
Invariant Tetrachords in the Prime Sets



to accompany pg. 8

Table 9  
Inverse Fibonacci Pitch Class Sets

---

-f0	0
	0 1 11 2 9 5 4 1 3 10 5 5 0 5 7 10 9 1 8 5 3 2 1 1
-f1	0 11 1 10 3 7 8 11 9 2 7 7 0 7 5 2 3 11 4 7 9 10 11 11
	2 11 3 8 7 1 6 7 11 8 3 5 10 7 3 4 11 5 6 11 7 4 3 1
-l1	10 1 9 4 5 11 6 5 1 4 9 7 2 5 9 8 1 7 6 1 5 8 9 11
-f2	0 2 10 4 6 10 8 2 6 8 10 10 0 10 2 8 6 2 4 10 6 4 2 2
	0 3 9 6 3 3
-f3	0 9 3 6 9 9
-f4	0 4 8 8 0 8 4 4
-f6	0 6 6

---

to accompany pg. 9



